# PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE ALGUNOS TÓPICOS DE LA VARIABLE COMPLEJA EN LA MEDIA VOCACIONAL DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA EMPRESARIAL DEL MUNICIPIO DE DOSQUEBRADAS

**Ever García Segura**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**
**FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS**
**MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**
**PEREIRA, 2018**

# PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE ALGUNOS TÓPICOS DE LA VARIABLE COMPLEJA EN LA MEDIA VOCACIONAL EN LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA EMPRESARIAL DEL MUNICIPIO DE DOSQUEBRADAS

**Ever García Segura**

**Trabajo de grado para optar el título de:**

**Magister en Enseñanza de la Matemática**

**Director**

**José Rodrigo González Granada, PhD.**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**
**FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS**
**MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

**PEREIRA, 2018**

**Nota de Aceptación**

Firma Presidente del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

*Pereira, Junio 12 de 2018*

**Dedicatoria**

A mis padres por permitirme la llegada a este mundo y a mis hijos,

Ya que son la prolongación de mi existencia…

*Ever García Segura*

**Agradecimientos**

- ✓ Al Dr. José Rodrigo González Granada, por su compromiso, dedicación y aportes en la elaboración de éste proyecto.
- ✓ A Jonhatan Estrada y su esposa, por la hospitalidad, colaboración y las largas horas que compartimos juntos trabajando en su casa.
- ✓ A mi familia por el tiempo que dejé de atenderles para sacar adelante este logro.
- ✓ A la Institución Educativa Empresarial, los docentes y los estudiantes que participaron en la elaboración de la propuesta.
- ✓ A Iván Alberto Vergara, mi primo, quien con sus valiosos aportes pedagógicos contribuyó con al afinamiento de mis ideas.
- ✓ A mis amigos por su apoyo y colaboración.
- ✓ Al profesor Néstor Conrado, por su asesoría y colaboración en la elaboración del juego Enigma.
- ✓ Y a Sandra Naranjo, por su contribución en la estructuración de la presentación y la revisión del proyecto.

# Certificación Asesoría

La trayectoria más corta entre dos verdades en el dominio real

Pasa a través del dominio complejo.

*Jacques Hadamard*

## Resumen

El estudio de los números complejos, como una alternativa que permite ampliar la compresión del concepto de número, sus relaciones y aplicaciones en otras áreas tales como el álgebra y la trigonometría, es el objeto de esta investigación de tipo mixto; en la cual la ingeniería didáctica con sus diferentes fases nos permite marcar el derrotero para el desarrollo de una secuencia didáctica que posibilite al estudiante de grado décimo de la Institución Educativa Empresarial adquirir un dominio y comprensión desde un punto de vista geométrico de los números complejos, sus operaciones, algunas transformaciones y su aplicación en problemas de la cotidianidad.

El componente geométrico se desarrolla a través de dos herramientas que facilitan la comprensión de los conocimientos matemáticos a saber: El geoplano, como material didáctico concreto que permite la adquisición de los conocimientos en forma práctica y el uso de software tales como Goegebra, Excel y el video juego “Enigma”.

**Palabras claves**: Número lateral, Geoplano, Secuencia didáctica, Ingeniería didáctica, Número complejo.

The shortest path between two truths in the real domain
Passes through the complex domain
*Jacques Hadamard*

## Abstract

The study of complex numbers, as an alternative that allows to expand the understanding of the concept of number, its relations and applications in other areas such as algebra and trigonometry, is the object of this mixed type research; in which the didactic engineering with its different phases allows us to mark the course for the development of a didactic sequence that enables the tenth grade student of the Business Educational Institution to acquire a domain and comprehension from a geometric point of view of complex numbers, its operations, some transformations and its application in everyday problems.

The geometric component is developed through two tools that facilitate the understanding of mathematical knowledge namely: The geoplane, as concrete didactic material that allows the acquisition of knowledge in a practical way and the use of software such as Goegebra, Excel and the video game "Enigma".

**Keywords**: Side number, Geoplane, didactic sequence, didactic engineering, complex number.

# Contenido

**Lista de tablas**

**Lista de figuras**

## Introducción

Teniendo en cuenta los planteamientos de García (1991), en su texto, matemáticas en secundaria, “la didáctica de cualquier asignatura significa, en palabras de Freudenthal (1991, p 45), la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje relevantes para tal materia” (p.1). En ese sentido los didactas son organizadores, desarrolladores de la educación, autores de libros de texto, profesores de toda clase, incluso los estudiantes que organizan su propio aprendizaje individual o grupal. Y sigue planteando García (1991) que, para Brousseau (Kieran, 1998, p.596), “la didáctica es la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento. Saber qué es lo que se está produciendo en una situación de enseñanza es el objetivo de la didáctica” (p.1).

Así pues, esta propuesta busca, precisamente en éste marco, aportar a la construcción de una propuesta didáctica que dé cuenta del aprendizaje de algunos temas de una de las asignaturas de mayor dificultad para los estudiantes y que genera grandes expectativas en cuanto a su dominio en nuestro sistema escolar, pues no podemos olvidar que es una de las materias en la cual se ha centrado últimamente el Ministerio de Educación Nacional, que ha generado los estándares de competencias en el área de matemáticas, como también los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA); en sus dos versiones, así como contenidos fundamentales tendientes a mejorar los desempeños de los estudiantes en esta importante área del conocimiento.

Además, a nivel mundial podemos destacar que actualmente, investigadores en esta área del conocimiento están haciendo esfuerzos por elaborar teorías que desarrollen modelos teóricos que contribuyan a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, a generar estrategias metodológicas más adecuadas a la realidad del alumno y en general al desarrollo de investigaciones tendientes a dar cuenta de la solución de dicha problemática. Al respecto, existen propuestas concretas de algunos especialistas, como la teoría de los Significados Institucionales y Personales de un Objeto Matemático de Godino y Batanero (1994, 2001, 2003), la de los Campos Conceptuales de Vernaud (1990), la Teoría Antropológica de la Didáctica la matemática de Chevallard (1991), la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), Organizadores del Currículo de Rico (1997), la Socio epistemología de Cantoral (2004), y en particular en el mundo de los números complejos.

En éste sentido la variable compleja que permite resolver ecuaciones cuya solución no está dentro del conjunto de los números reales, sino en una extensión dimensional de los mismos, que permite el cálculo de todas las posibles raíces de un polinomio de grado ene-ésimo; como ejemplo mencionemos un problemas planteado por Diofhantes (siglo III), en su obra aritmética, donde propone “hallar los lados de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 12 y de área 7” situación que conduce a la ecuación $336x^2 + 24 = 172x$, cuya solución no está en el marco de los números reales, inentendible de manera tangible en los estudiantes y su entorno más próximo, pero que cuya didáctica tradicional y muchas contemporáneas, no logran resolverse en los procesos de aprendizaje.

Por ello la presente propuesta de investigación busca aportar una apuesta didáctica que permita dar cuenta de manera exitosa del aprendizaje de algunos tópicos de la variable compleja, tales como: Números complejos, topología del plano complejo, operaciones de los números complejos, aplicaciones con números complejos, y de algunas transformaciones básicas; a partir de la indagación de las metodologías aplicadas en sus pro y contras en la Institución Educativa Empresarial de Dosquebradas, la reflexión amplia de la misma y por ende el apunte a la innovación didáctica para la enseñanza-aprendizaje de uno de los dilemas matemáticos más incomprensibles debido al alto nivel de abstracción con que se aborda en los jóvenes estudiantes de básica y media vocacional.

Así pues, si seguimos a García (1991), quien citando a Steiner (1985), expresa que:

> La complejidad de los problemas planteados en la didáctica de las matemáticas produce dos reacciones extremas. En la primera están los que afirman que la didáctica de la matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por lo tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte. En la segunda postura nos encontramos aquellos que piensan que es posible la existencia de la didáctica como ciencia y reducen la complejidad de los problemas seleccionando sólo un aspecto parcial al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la misma. Reiterando con Steiner la didáctica de la matemática debe tender hacia lo que Piaget denominó transdisciplinariedad lo que situaría a las investigaciones e innovaciones en didáctica dentro de las interacciones entre las múltiples disciplinas, (Psicología, Pedagogía, Sociología entre otras sin olvidar a la propia Matemática como disciplina científica) que permiten avanzar en el conocimiento de los problemas planteados. (García, 1991, p. 1)

Para esta investigación el tema en cuestión es la complejidad de la enseñanza de la variable compleja, para lo cual se asume la segunda postura, ya que la instrucción de la matemática, hoy en día es asumida como una disciplina científica que, sobre la base de las investigaciones desarrolladas en todo el mundo con el objetivo de mejorar los niveles de desempeño y aplicaciones de la misma, dan respuesta a inquietudes y planteamientos sobre el cómo se aprende, cuáles son los procesos que se realizan en la mente del individuo cuando trabaja las matemáticas, cuáles son los contenidos más relevantes para el aprendiz, que si se recurre a los elementos básicos planteados por los griegos o por las diferentes teorías tendientes a su mejorar su comprensión o qué si es o no importante el uso y aplicación de recursos tecnológicos, entre otras; lo cual consideramos que tiene relación con diversos campos del saber, tales como la pedagogía, epistemología, la psicología, la sociología, la didáctica, la biología, etc, que finalmente sustentan la razón de ser de la matemática como disciplina presente en todos los avances científicos, tecnológicos, económicos y sociales.

## 1. Planteamiento y formulación del problema

El proyecto indagará el problema didáctico del aprendizaje de algunos tópicos de la variable compleja en la media vocacional de la Institución Educativa Empresarial, del Municipio de Dosquebradas, partiendo de la revisión de las didácticas empleadas por los docentes de matemáticas de la misma institución, los impactos positivos y/o negativos en los estudiantes a la luz de los diversos discursos construidos sobre didácticas en nuestra época contemporánea aplicadas en el campo internacional y nacional, de tal manera que contribuyan como referentes para la construcción de una propia, pero teniendo como fuerza rectora nuestra propia experiencia y sabiduría contextual y cultural, y aplicando una metodología investigativa tanto cualitativa como cuantitativa con sus respectivos instrumentos de recolección y análisis de información en aras de formular unos hallazgos que nos permitan una construcción didáctica exitosa en el aprendizaje de algunos tópicos de la variable compleja en el amplio mundo de las matemáticas.

Ahora bien, los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en los últimos tiempos en nuestro país y en la región se han constituido en una de las didácticas más complicadas en su enseñabilidad, toda vez que, se evidencia en una gran cantidad de discusiones, análisis de la situación, y expectativas para darle solución a ésta problemática en particular, evidenciados en los bajos resultados de las pruebas nacionales tales como las Pruebas Saber de la educación básica, Saber 11, e internacionales como las Pruebas PISA, de un gran número de los estudiantes; de tal manera que desarrollar las competencias matemáticas se ha convertido en uno de los objetivos centrales tanto del Ministerio de Educación Nacional (MEN), la Institucionalidad educativa, los docentes y los mismos educandos a la hora de enfrentar diversas pruebas, las carreras universitarias y hasta el mundo laboral.

Para determinar la incidencia de este problema en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes en la Institución Educativa Empresarial, se hizo una prueba diagnóstica con los alumnos del grado once del año escolar 2017, en la que se buscaba conocer el nivel de competencia que habían adquirido sobre los números complejos. La prueba constaba de 9 preguntas en las que demostraron tener bajos conocimientos sobre la temática, pues al menos un 90% de los estudiantes no acertó en las respuestas de la prueba o las respuestas estaban incompletas. Para ampliar la información de estos resultados ver el anexo 9.

En el campo docente, el tema de la enseñanza de la matemática se ha convertido en un gran debate didáctico donde docentes desde el preescolar hasta la universidad se culpabilizan los unos a los otros por las malas bases en la formación de los estudiantes; los cuales, en su proceso de formación deben desarrollar competencias en los diversos pensamientos encaminados al aprendizaje de la matemáticas: El pensamiento numérico y los sistemas de numeración, el pensamiento espacial y sistemas geométricos, el pensamiento métrico y sistemas de medidas, el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, y el pensamiento aleatorio y de sistemas de datos.

De esta forma, el dominio y comprensión de los conceptos básicos de la variable compleja en el campo matemático y fundamentalmente en el de los conjuntos numéricos, y en la comprensión, al menos en forma intuitiva del teorema fundamental del álgebra; se convierte en una herramienta de gran utilidad ya que conllevan a la resolución de ecuaciones de grado-n, y que por su alto nivel de abstracción se salen de la comprensión inmediata de los estudiantes, pero que constituyen la base para la asimilación de nuevos conocimientos tales como los conocimientos geométricos relacionados con los movimientos del plano, las integrales, las ecuaciones y sus aplicaciones en las ingenierías y en las ciencias económicas.

En éste sentido, hacemos la siguiente pregunta; *¿cómo construir una propuesta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas que contribuya a minimizar la deficiencia existente sobre las competencias relacionadas con el dominio de algunos conceptos básicos de la variable compleja en la media vocacional?*

De esta manera, la pregunta de investigación sería:

¿Cómo aportar una propuesta didáctica para el aprendizaje de algunos tópicos de la variable compleja (números complejos, topología del plano complejo, operaciones con los números complejos y algunas transformaciones), en la media vocacional en la Institución Educativa Empresarial del municipio de Dosquebradas?

# 2. Objetivos

## 2.1. Objetivo General

Elaborar una propuesta didáctica para el aprendizaje de algunos tópicos de la Variable Compleja en la media vocacional en la Institución Educativa Empresarial del municipio de Dosquebradas.

## 2.2. Objetivos Específicos

2.2.1 Identificar las problemáticas que se presentan en la enseñanza – aprendizaje de la variable compleja en la media vocacional de la Institución Educativa Empresarial del municipio de Dosquebradas.

2.2.2 Evidenciar las apuestas didácticas y las prácticas de aula en la media vocacional con respecto al aprendizaje de la variable compleja en la Institución Educativa Empresarial de Dosquebradas.

2.2.3 Construir una propuesta didáctica, utilizando aspectos geométricos y analíticos adquiridos por los estudiantes en los cursos anteriores.

2.2.4 Construir un elemento computacional llamativo que contribuya a validar el aprendizaje adquirido por los estudiantes.

## 3. Justificación

El hombre a lo largo de la historia ha construido diversos conjuntos numéricos acordes con sus necesidades y contextos culturales que con su aplicación contribuyen a la construcción de la solución de los diversos problemas relacionados con su entorno; pero además de la matemática, la complejidad de las situaciones exige que se involucren también la ciencia, la tecnología y otras áreas del conocimiento relacionadas con ésta importantísima herramienta del pensamiento humano. Los estudiantes en el desarrollo de su pensamiento matemático a nivel de la básica secundaria y la media vocacional, deben tener claridad, dominio de sus propiedades y la posibilidad de aplicación en diversos contextos de los conjuntos de números que se han formalizado, para aplicarlos en su cotidianidad y de esta forma no ser inferiores a las exigencias que se plantean en la solución de los problemas de su entorno y cuya herramienta principal es el conjunto de los números racionales e irracionales, y a partir de ellos la construcción de los reales.

En la solución de ecuaciones y la búsqueda de los ceros de algunos polinomios, con frecuencia los alumnos requieren de soluciones que están fuera del dominio de los números reales y que con un poco de esfuerzo e instrucción las encuentran en los números complejos; los cuales denominaremos “números laterales” en nuestra propuesta para facilitar su comprensión y evitar el problema que genera si se les denomina números complejos, (muy difíciles de aprender), los cuales han sido utilizados por los matemáticos desde siglos anteriores pero que su formalización se logra apenas en el siglo XX, debido a su aplicación en diversos campos de la matemática moderna, hasta el punto de ser considerados una de las creaciones más maravillosas de nuestro tiempo, debido a las potencialidades que nos facilitan desde el punto de vista geométrico, algebraico y variacional.

El artículo escrito en el diario el País de España, el 22 de Septiembre de 2017, en la sección café y teoremas, propuesto por el Dr. Jared Aurentz, titulado Polinomios en la Construcción de Edificios Seguros; se encuentra una reflexión sobre la aplicación del dominio de los números Complejos en la solución de ecuaciones, en la aplicación del Teorema Fundamental del Álgebra, en la ciencia y en el campo financiero con el análisis numérico; tal como lo muestra Aurentz (2017):

> El cálculo de las raíces no es siempre sencillo, y los matemáticos llevan siglos dedicados a este problema. Hay dos resultados clave sobre ello. El primero es el Teorema Fundamental del Álgebra, que establece que todo polinomio de grado n (el mayor de los exponentes de la variable) tiene n raíces, algunas de ellas pueden ser múltiples, en el mundo de los números complejos. De esta manera, sabemos exactamente cuántas raíces debemos buscar. El segundo resultado es el llamado Teorema de Abel, que afirma que no hay una fórmula general, que implique únicamente las operaciones básicas, para obtener las raíces de los polinomios de grado cinco o mayor. (p.1)

La variable compleja históricamente y aún en los tiempos modernos del desarrollo de la matemática, es considerada el núcleo que ha sido capaz de transitar por los diferentes métodos aritméticos, geométricos, algebraicos y topológicos para entender y resolver muchos problemas que durante siglos estuvieron abiertos.

Pese a lo anterior, los planes de estudio de algunas Instituciones Educativas no contemplan su enseñanza, cual es el caso de la Institución Educativa Empresarial, lo cual se debe probablemente al desconocimiento que tienen algunos docentes e instituciones sobre su importancia.

Por tal razón la comprensión y dominio de los elementos básicos de la variable compleja, se constituye en una herramienta fundamental para el estudiante de la Institución Educativa Empresarial, del municipio de Dosquebradas, la cual en los resultados de las pruebas Saber, realizadas por los estudiantes en los últimos cinco años; en los grados tercero, quinto, noveno y once, han obtenido unos bajos resultados en lo referente a las competencias donde se aplican los diversos conjuntos numéricos, en el componente variacional y en lo relacionado con el componente geométrico métrico, pese a que en los Lineamientos Curriculares y en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), se aborda esta temática como ejes fundamentales del pensamiento matemático. Esta situación también se evidencia en otros colegios del municipio, ya que son bajos los resultados de una gran cantidad de estudiantes en dichas pruebas pese a los grandes esfuerzos que se hacen desde el Ministerio de Educación para mejorar los desempeños, con planteamientos que involucran a las secretarias de educación y por ende a las instituciones educativas a través de propuestas integradas que relacionen los Lineamientos curriculares, los estándares, los derechos básicos, el día de la excelencia y las pruebas que se realizan a los estudiantes.

En los Lineamientos Curriculares, propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1995), se plantean los cinco procesos generales de la actividad matemática: Formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. En el marco de estos procesos que deben desarrollarse en la enseñanza-aprendizaje de la matemática, el estudio y comprensión de la variable compleja contribuye en varios de ellos tales como la formulación y solución de problemas, el razonar, y ejercitar procesos y algoritmos, entre otros.

En el caso del razonamiento como actividad del pensamiento que nos permite argumentar las ideas en forma lógica, coherente y que potencializa la capacidad de pensar en los estudiantes, formular hipótesis, conjeturas y realizar demostraciones sobre la base de argumentos sólidos; al respecto el documento del MEN (2006) plantea: "Es conveniente que en las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas" (p.54)

Además en los Lineamientos Curriculares y los estándares básicos de competencia, se plantean los cinco pensamientos que se deben trabajar en la matemática en los diferentes grados desde la primaria hasta el grado undécimo, los cuales son:

1. El pensamiento numérico y los sistemas numéricos
2. El pensamiento espacial y los sistemas geométricos
3. El pensamiento métrico y los sistemas de medidas
4. El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos
5. El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

El resultado de esta investigación busca contribuir al fortalecimiento de al menos tres de estos pensamientos: el numérico, el geométrico y el variacional ya que la comprensión de la variable compleja, nos permite la integración de estos, apoyándonos en la parte práctica mediante el uso del geoplano y del componente tecnológico ya que haremos uso de Geogebra y la aplicación de un juego interactivo para dinamizar el aprendizaje de los estudiantes.

En cuanto a los 85 DBA, propuestos por el MEN como conocimientos mínimos, que deben dominar los estudiantes de todas las instituciones educativas del país, encontramos que más de diez abordan aspectos relacionados con nuestro tema de investigación, de manera aislada en los diversos grados desde el grado sexto hasta undécimo, para lo cual consideramos pertinente mencionar los siguientes:

El Séptimo DBA, del grado sexto: “Reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico geográfico” (MEN, 2015, p. 12)

El quinto DBA, del grado décimo: “Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones” (MEN, 2015, p.25)

Razón por la cual consideramos desarrollar ésta propuesta con los estudiantes de grado décimo B de la Institución Educativa Empresarial, la cual les permitirá utilizar los conocimientos adquiridos en grados anteriores tanto de geometría, álgebra y de trigonometría.

Por lo anterior, esta investigación permite centrarnos en la construcción de una propuesta didáctica encaminada a hacer de la variable compleja un atractivo comprensible y motivacional en los estudiantes de la media vocacional. Además de ser un tema novedoso no abordado con toda la profundidad del caso, en la educación matemática, en el mundo de la práctica docente a ese nivel y que nos llama al imperativo de abordarlo y aportar elementos que contribuyan a hacer de las matemáticas y de la variable compleja no solo un tema científico, sino también abordable didácticamente en el campo de la educación, la escuela y la práctica de aula específicamente.

***Figura 1. Estudiantes del grado 10B trabajando en la implementacióno de la propuesta***

Fuente: Investigación del autor

## 4. Estado del Arte

Pese a que el tema de los Números Complejos se desarrolla en los textos de educación básica en el grado noveno para darle explicación a las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, cuando el discriminante $b^2 - 4ac < 0$, cuyas soluciones están fuera del conjunto de los números reales y en los libros de texto de la enseñanza básica se trabaja la definición de los números complejos y sus operaciones fundamentales, no se hace un trabajo orientado a crear las bases para que en la media vocacional los docentes puedan establecer las nociones fundamentales sobre la variable compleja, pese a la importancia que tiene para la comprensión de contenidos posteriores, las aplicaciones geométricas que nos facilitan y su relación con la trigonometría como también su aplicación en cursos de educación superior y en la comprensión de importantes conceptos de la matemática moderna.

La búsqueda de material bibliográfico en el tema de la enseñanza de los números complejos a nivel de la educación básica y media vocacional en nuestro país y la región nos permitió llegar a los siguientes hallazgos:

En el texto Nuevas Matemáticas 9, de Editorial Santillana (2007), la tercera unidad está destinada al estudio de los números Complejos, en ella se hace una breve reseña histórica, en la que se menciona a C. Gauss y Riemann como sus precursores; también se definen en su forma binómica, se trabajan las operaciones de suma, resta, multiplicación y finaliza la unidad con una página destinada a la descripción de los fractales.

En el libro de texto: Matemáticas 2000, de Editorial Voluntad (1990) de Mauricio Villegas se trabaja una unidad cuyo nombre es “Números complejos y función cuadrática”, en la que se definen los complejos en forma algebraica, se enfatiza en las potencias de la unidad imaginaria y se efectúan las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de los números complejos.

Revisando la biblioteca de la Universidad Tecnológica de Pereira encontramos el trabajo de pregrado para obtener el título de licenciados en matemáticas y física de Bañol y Cardona (2013), denominado “Aplicaciones de la variable Compleja en la Física”, en el que abordan algunas aplicaciones de la variable compleja en la física, pero que también está direccionado para estudiantes universitarios, al igual que algunos libros y artículos producidos por docentes de la Universidad Tecnológica de Pereira, por ejemplo el libro Tópicos de Análisis Complejo, cuyo autor es el doctor José Rodrigo González Granada y Alejandro Martínez, el cual contiene los elementos fundamentales de la variable compleja; tales como su componente histórico, sustentación teórica y la profundización en cuanto a teoremas y demostraciones; que hacen de él un importante aporte científico, pero que también está orientado al desarrollo de cursos de matemáticas a nivel superior.

También encontramos la tesis de grado de la magister Claudia Liliana Arredondo, “El sentido del número complejo desde sus raíces imaginarias” (2016), en la que hace un recorrido histórico de la existencia de los números complejos desde su descubrimiento por parte de Cardano en la solución de ecuaciones cúbicas hasta la formalización propuesta por Gauss, los diversos nombres que se utilizaron hasta su formalización; tales como sofísticos, imposibles, imaginarios entre otros; como también un recorrido minucioso de su devenir histórico y los obstáculos epistemológicos que se debieron superar para poder ser aceptados por la comunidad matemática.

El trabajo de Maestría de Iván Canal Martínez, titulado “La enseñanza de los números complejos en el bachillerato”, Universidad de Cantabria (2011). En el que elabora una propuesta metodológica para abordar los números complejos en instituciones donde se oriente el bachillerato en la modalidad de ciencias, propone el componente histórico y el uso de las TICs como herramienta de uso cotidiano por parte de los estudiantes.

El libro “Una Introducción a los Números Complejos”, escrito por Francisco Rivero Mendoza, Venezuela (2001), en el que realiza una propuesta para la enseñanza de los números complejos en Instituciones de Educación Media Diversifica, invitando a que los docentes se motiven a trabajar en los colegios estos números vistos no solo como un conjunto numérico más sino como una oportunidad para descubrir la magia que hay en ellos y las posibilidades que nos brindan desde el punto de vista geométrico en los movimientos del plano, la facilidad para en la comprensión y cálculo derivadas e integrales.

Lo anterior nos permite proponer elementos novedosos en el planteamiento de la propuesta y que esperamos sean de gran utilidad para la comunidad Educativa de la Institución Educativa Empresarial y en general para los docentes de matemáticas de la media vocacional y a la comunidad científica en el campo de la didáctica de la matemática.

# 5. Marco Teórico

## 5.1. Didáctica

Para Mallart (2000) el concepto de didáctica más acertado es el ofrecido por Dolch (1952), es la "ciencia del aprendizaje y de la enseñanza en general" (p. 6) y que tiene por objeto las decisiones normativas que llevan al aprendizaje gracias a la ayuda de los métodos de enseñanza, en otras palabras, según Mallart (2000), la didáctica es la ciencia de la educación que estudia e interviene en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de conseguir la formación intelectual del educando.

Por otra parte, para Hernández (2007), la didáctica está centrada en los principios y técnicas, válidos para la enseñanza de cualquier materia o disciplina y que para ser válida debe estar vinculada a los objetivos de la educación y centrada en el educando.

La didáctica es ciencia y arte de enseñar según Hernández (2007):

> Es ciencia en cuanto investiga y experimenta nuevas técnicas de enseñanza, teniendo como base principalmente, la biología, la psicología, la sociología y la filosofía. Es arte, cuando establece normas de acción o sugiere formas de comportamiento didáctico basándose en los datos científicos y empíricos de la educación; esto sucede porque la didáctica no puede separar teoría y práctica. (Hernández, 2007, p. 17)

Por otra parte, la didáctica es una disciplina de naturaleza pedagógica, orientada por las finalidades educativas y comprometidas con el logro de la mejora de todos los seres humanos, mediante la comprensión y transformación permanente de los procesos socio-comunicativos, la adaptación y desarrollo apropiado del proceso de enseñanza- aprendizaje.

Ella amplía el saber pedagógico y psicopedagógico, aportando los modelos socio-comunicativos, la adaptación y el desarrollo apropiado del proceso de enseñanza-aprendizaje; pero estos saberes exigen del docente, una preparación e investigación, que hacen que la labor de planeación docente se lleve a un plano neurolingüistico y metacognitivo. Lo que recuerda la definición de Medina y Salvador (2009): "La didáctica requiere un gran esfuerzo reflexivo-comprensivo y la elaboración de modelos teóricos aplicados que posibiliten la mejor interpretación de la tarea del docente y de las expectativas e intereses de los estudiantes" (p. 15).

Ahora bien, desde este punto de vista siguiendo los enunciados anteriores, la didáctica tiene como eje central el aprendizaje con el fin de conseguir la formación de los educandos; así mismo contribuye a generar teorías sobre la enseñanza a partir de la práctica docente para incidir en ella en los marcos del saber, del hacer, del saber hacer y del saber ser, y, los docentes como didactas que enseñan, instruyen, comunican, hacen aprender, que no es más que el hacer saber.

La didáctica tiene diversas clasificaciones que van desde la general, la didáctica diferencial hasta la didáctica especifica asociada a un campo del saber o a un conocimiento específico de ese saber; tal es el caso de la matemática que ha desarrollado diversas situaciones didácticas en gran parte de los contenidos que la integran.

La didáctica igualmente tiene unos ámbitos de intervención determinados por las autoridades, por la evaluación sistemática de sí misma, por los contenidos necesarios que desarrolla para la vida social y que además es impartida por especialistas que siguen normas didácticas y horario escolar; cuya finalidad teórica es describir y explicar el proceso didáctico y práctico, el de elaborar propuestas para la acción. Y es en este marco precisamente en el que vamos a orientar nuestra apuesta didáctica para la enseñanza de algunos tópicos de la variable compleja en la media vocacional de la Institución Educativa Empresarial.

## 5.2 El concepto de número

El número en matemáticas es una herramienta fundamental, hasta el punto de ser considerados el objeto más básico. Ellos nos brindan la posibilidad de afrontar problemas de diversa índole en todas las culturas, hasta el punto de considerarse la matemática como la ciencia de los números y se utilizan para representar cantidades o magnitudes prácticamente desde el origen mismo de la humanidad; es más, existen estudios del uso estructurado de los números de una forma muy parecida a la que utilizamos en la actualidad que datan de más de cinco mil años.

Tanto la Teoría de Números como el Análisis, son ramas de la matemática dedicadas al estudio de las relaciones, las propiedades y las aplicaciones de los números en diversas situaciones de la vida, sólo para mencionar dos campos de la matemática; aunque como es sabido el concepto de número permea todas las ramas de la matemática.

La formalización de los diferentes conjuntos numéricos más utilizados en la actualidad ha atravesado diversas etapas que van desde el uso de variados símbolos para su representación, hasta la aceptación de sistemas de numeración ya sean aditivos o posicionales; creados por diversas culturas ancestrales desde los babilonios, egipcios, griegos, romanos, chinos, árabes, hindúes y culturas aborígenes e indígenas, que de manera práctica y en forma permanente siguen haciendo uso de su sistema de numeración, tal es el caso de los Mayas que inventaron un sistema de numeración vigesimal y en nuestro entorno los Embera-Chamí, en el departamento de Risaralda; hasta la formalización de conjuntos numéricos utilizados por la comunidad científica universalmente, como el número complejo y cuyo "sentido" es analizado en el trabajo de grado propuesto por Arredondo (2016).

Por otro lado, la mayoría de los sistemas de numeración creados por el hombre tuvieron su origen en la necesidad de contar, clasificar y numerar y para ello utilizaron principalmente algunas partes del cuerpo como los dedos. Cada uno de los números u objetos matemáticos de dichos sistemas de numeración son considerados un numeral y constituyen la célula fundamental de todo el andamiaje de las matemáticas y su estudio se centra en una de sus ramas (la aritmética), que según Gauss, es la reina de las ciencias.

Según Hernández (2006) “En matemática la definición de número se extiende para incluir abstracciones tales como números fraccionarios, negativos, irracionales, trascendentales, complejos” (p. 18), aunque en la actualidad se utilizan y aceptan en algunos círculos científicos otros de tipo más abstracto como los números hipercomplejos, los números hiperreales o los cuaterniones.

En la cultura occidental y prácticamente de manera universal los números más conocidos y utilizados son los Números Reales, los cuales generalizan y dan respuesta a muchos de los problemas, pero con los números reales no es posible resolver algunas ecuaciones o raíces de todos los polinomios, razón por la cual no se consideran un cuerpo algebraicamente cerrado.

Es por esto que se hace necesario la introducción de los Números Complejos, que se pueden considerar como una ampliación del Conjunto de los números reales; siendo éstos un subconjunto de los complejos y que constituyen el menor cuerpo algebraicamente cerrado, que permite hallar los ceros de polinomios de variables reales y de ésta forma dar solución a muchos problemas matemáticos y de otras ciencias.

En el conjunto de los reales, existen números que no son solución a una ecuación polinómica con coeficientes racionales y que pueden ser expresados como una sucesión de Couchy; tal es el caso de los números $\pi$ y $e$; que son muy utilizados en la medición de magnitudes de curvas y en el cálculo de logaritmos naturales y se conocen como números Trascendentales; los cuales no son raíces de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros no todos nulos.

### 5.3 Los números complejos

***Definición***

Un número complejo es un número de la forma $z = x + iy$, donde $x, y$ son su parte real e imaginaria. El conjunto de estos números los denotamos por $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, \qquad i^2 = -1\}$$

De igual modo los podemos definir como un par ordenado $(x, y)$ de números reales. Donde las partes reales e imaginarias vienen dadas por:

$$x = \Re e\, z; \;\; y = \Im m\, z, \qquad z = \Re e\, z + \Im m\, z$$

***Igualdad de Números Complejos***

Dos números complejos $z_1, z_2$ son iguales si sus partes reales e imaginarias son iguales,

$\Re e\, z_1 = \Re e\, z_2$ y $\Im m\, z_1 = \Im m\, z_2$

***Suma de Números Complejos***

Sean $z_1 = x_1 + y_1$, y $z_2 = x_2 + y_2$ , dos números complejos, definimos la suma de $z_1$ y de $z_2$, al número complejo $z = z_1 + z_2$ , tal que:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

***Resta de Números Complejos***

Sean $z_1 = x_1 + y_1$ y $z_2 = x_2 + y_2$ , dos números complejos, definimos la resta de $z_1$ y de $z_2$, al número complejo $z = z_1 - z_2$ , tal que

$z = z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) + (-(x_2 + iy_2)) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

***Propiedades de la suma de Números Complejos***

Sean $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ e\ \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Clausurativa: si $z_1,\ z_2,\ \in \mathbb{C}$, entonces $z_1 +\ z_2, \in \mathbb{C}$
2. Conmutativa: $z_1 +\ z_2 = z_2 + z_1$
3. Asociativa: $z_1 + z_2 + z_3 = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4. Modulativa: Existe un elemento único $e$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple que $e + z = z + e = z$. Siendo $e = 0 + 0i$. A este elemento lo llamamos el neutro aditivo en $\mathbb{C}$
5. Invertiva: Para todo $z$ existe un elemento inverso aditivo $z'$ tal que $z + z' = z' + z = e$. Siendo $z' = -z$. A este elemento lo denominamos inverso aditivo en $\mathbb{C}$.

***Multiplicación de números Complejos***

La multiplicación de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1$ y $z_2 = x_2 + y_2$, es el número complejo $z$, tal que $z = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)$.

***Propiedades de la multiplicación de Números Complejos***

Sean $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ e\ \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Clausurativa: $z_1 * z_{2\,=}\, z_3,\ \ donde\ z_3\ \in \mathbb{C}$
2. Conmutativa: $z_1z_2 = z_2z_1$.
3. Asociativa: $z_1z_2z_3 = (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$
4. Modulativa: Existe un elemento único $e$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple que $ez = ze = z$. Siendo $e = 1 + 0i$. A este elemento lo llamamos el neutro multiplicativo en $\mathbb{C}$.

5. Invertiva: Para todo $z$ existe un elemento inverso multiplicativo $z'$ tal que $zz' = z'z = e$. Siendo $z' = \frac{1}{z} = z^{-1}$. A este elemento lo denominamos inverso multiplicativo en $\mathbb{C}$.
6. Distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Las anteriores propiedades convierten al conjunto de los números complejos en un Campo, teniendo en cuenta que un Campo o cuerpo es una estructura algebraica, que relaciona en un conjunto las operaciones de suma, multiplicación y sus propiedades. El siguiente teorema nos brinda las propiedades generales de los complejos $\mathbb{C}$.

***Teorema***

El conjunto de los Números Complejos $\mathbb{C}$**,** con las operaciones suma y multiplicación por un escalar real o complejo forman un campo.

Los primeros cinco axiomas son para la suma y los restantes para la multiplicación.

1. La Adición es asociativa,
2. El conjunto de los números complejos posee en elemento neutro $e = 0 + 0i$.
3. Todo número complejo $z$ posee un inverso aditivo $-z$, que al sumarse su resultado es el neutro.
4. La multiplicación es clausurativa.
5. La multiplicación es conmutativa.
6. La multiplicación es asociativa.
7. La multiplicación posee un elemento neutro.
8. La multiplicación cumple la propiedad Invertiva.
9. La multiplicación cumple la propiedad distributiva.

La mayoría de las propiedades de los números reales también se cumplen en los complejos; sin embargo, no es posible establecer **la relación de orden** en los complejos, es decir si $z_1, \ z_2,$ $\in \mathbb{C}$, no se cumple que $z_1 < z_2 \ o \ z_1 > z_2$ tal como lo indica Apostol (1993), un número complejo nunca es menor o mayor que otro.

Además, los reales se representan en una recta (recta real), mientras que para representar los complejos utilizamos un plano, conocido como plano Argand (llamado así en honor a Argand, quien representó los números complejos en un plano en 1806), representación de gran importancia en el desarrollo de éste trabajo y en la comprensión muchos conceptos asociados a la variable compleja, tal como lo menciona Suazo (2015).

La representación geométrica facilita la visualización de muchos conceptos tal como: argumento o ángulo de un número complejo, conjugado de números complejos, módulo (llamado longitud o norma de un número complejo), el desarrollo de la forma polar que se ayuda de las coordenadas polares, transformaciones, funciones analíticas, las ecuaciones de Cauchy – Riemann en coordenadas cartesianas y polares. Además, funciones elementales como la función exponencial compleja, logaritmo natural complejo, funciones trigonométricas e hiperbólicas. También otros conceptos y aplicaciones.

***Representación del número Complejo***

Cualquier número complejo z, se puede representar geométricamente de tres formas diferentes:

a. Como un punto del plano.

b. Como un segmento dirigido o vector

c. En forma polar.

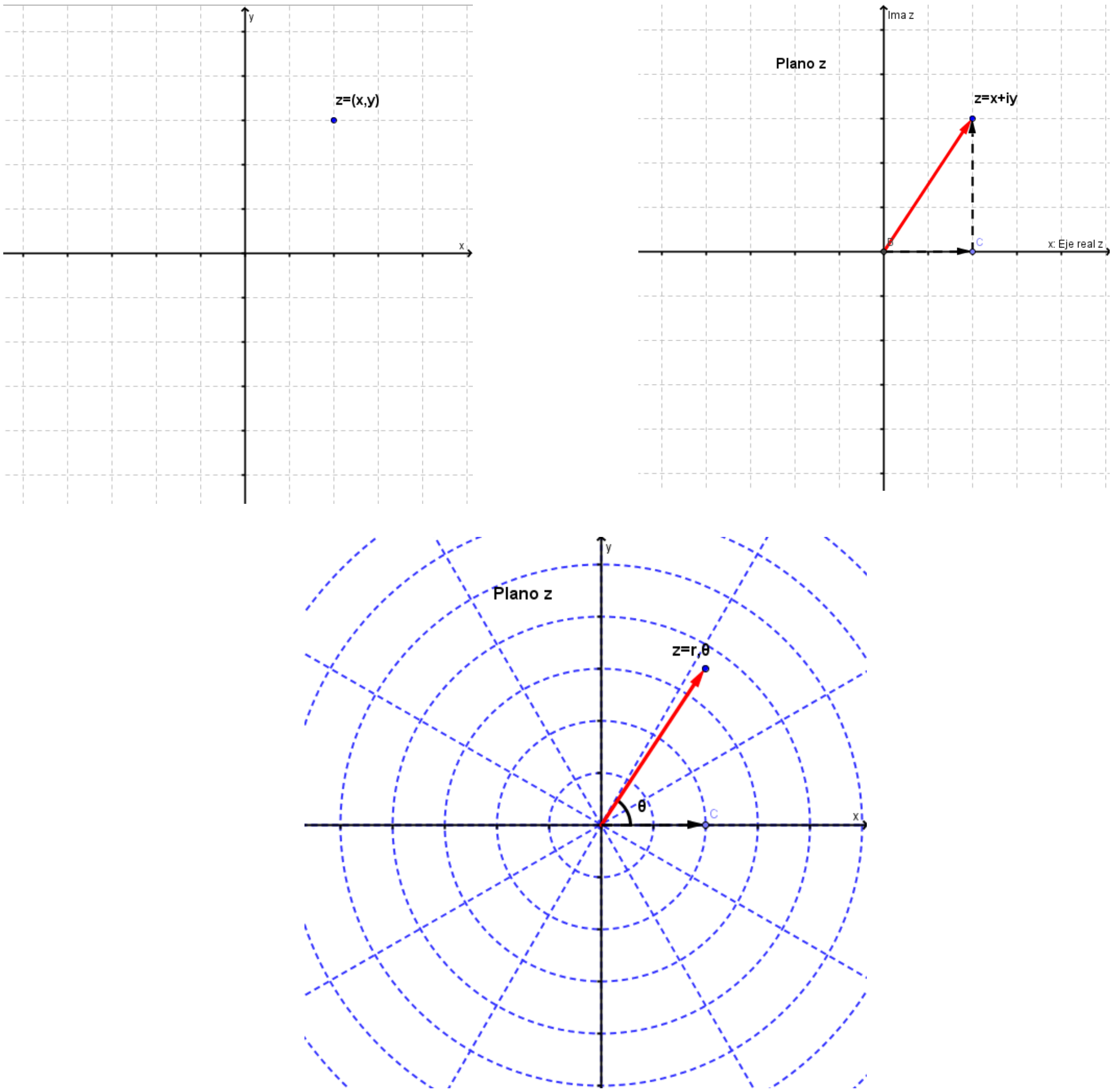



***Figura 2. Repressentación geométrica de números complejos***

Fuente: Adaptado de Geogebra

***Potencias y raíces de Números complejos***

Para el cálculo de las potencias y raíces de números complejos utilizamos una herramienta muy importante, la cual se obtiene del siguiente teorema:

**Teorema de Demoivre**

Sea $z \in \mathbb{C}$ $y$ $n \in \mathbb{N}$, entonces $z^n = r^n(cosn\theta + isenn\theta)$ Lo cual se demuestra por inducción matemática. (González, 2009)

*Demostración:*

Para $n = 1$, $z = r(cos\theta + isen\theta)$, se cumple si suponemos $n = k$, el teorema se cumple $z^k = r^k(cosk\theta + isenk\theta)$, veamos que para $n = k + 1$,

$$z^{k+1} = z^k z = r^k(cosk\theta + isenk\theta)r(cos\theta + isen\theta)$$

$$= r^{k+1}[(cosk\theta cos\theta - senk\theta sen\theta) + i(senk\theta cos\theta + cosk\theta sen\theta)]$$

$== r^{k+1}[(\cos(k + 1)\theta + isen(k + 1)\theta)]$.

Así se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

***Raíces de un número complejo***

Las raíces de un número complejo se pueden extraer con base en el teorema de Demoivre, obteniendo la siguiente fórmula.

$w = \rho(cos\emptyset + isen\emptyset)$, $\quad z = r(cos\theta + isen\theta)$

$w^n = [\rho(cos\emptyset + isen\emptyset)]^n = \rho^n(cosn\emptyset + isenn\emptyset) = r(cos\theta + isen\theta)$

Es decir $\rho^n = r$, $\quad \rho = r^{\frac{1}{n}}$, $\quad n\emptyset = \theta * 2k\pi$, $\quad k = 0,1,2 \dots, n - 1)$, $\emptyset = \frac{\theta + 2k}{n}$

$$w = r^{\frac{1}{n}}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \text{Con } (k = 0,1,2, \dots, n - 1).$$

Podemos afirmar que todo número complejo no nulo posee n raíces distintas; las cuales se obtienen para $k = n - 1$, y de ahí en adelante se repiten los mismos puntos en forma infinita.

Por ejemplo hallemos $\sqrt{1-i}$

$$1 - i = \sqrt{2}\ \left[cos - \frac{\pi}{4} + isen - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\ \left[cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + isen\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right], \qquad k = 0{,}1.$$

Luego, $(k = 0)$, $\sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\ \left[cos\frac{-\pi}{8} + isen\frac{-\pi}{8}\right]$

$(k = 1)$, $\sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\ \left[cos\frac{7\pi}{8} + isen\frac{7\pi}{8}\right]$

**Raíces n-ésimas de la unidad**

Otra de las aplicaciones del teorema de Moivre es la posibilidad de encontrar todas las raíces de la unidad, mediante la expresión que permite el cálculo de las raíces.

Por ejemplo hallemos las raíces quintas de uno. $\sqrt[5]{1}\ es\ decir\ los\ números\ z\ tales\ que\ z^5 = 1$

$w = 1.\left(cos\frac{0+2k\pi}{5} + isen\frac{0+2k\pi}{5}\right)$, Con $(k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4)$

$$z_1 = (cos0 + isen0) = cos0 = 1$$

$$z_2 = \left(cos\frac{0+2\pi}{5} + isen\frac{0+2\pi}{5}\right) = \left(cos\frac{2\pi}{5} + isen\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$z_3 = \left(cos\frac{0+2*2\pi}{5} + isen\frac{0+2*2\pi}{5}\right) = \left(cos\frac{4\pi}{5} + isen\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$z_4 = \left(cos\frac{0+2*3\pi}{5} + isen\frac{0+2*3\pi}{5}\right) = \left(cos\frac{6\pi}{5} + isen\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$z_5 = \left(cos\frac{0+2*4\pi}{5} + isen\frac{0+2*4\pi}{5}\right) = \left(cos\frac{8\pi}{5} + isen\frac{8\pi}{5}\right)$$

Las cuales corresponden a los vértices de un polígono regular de cinco lados, tal como lo muestra la siguiente figura.

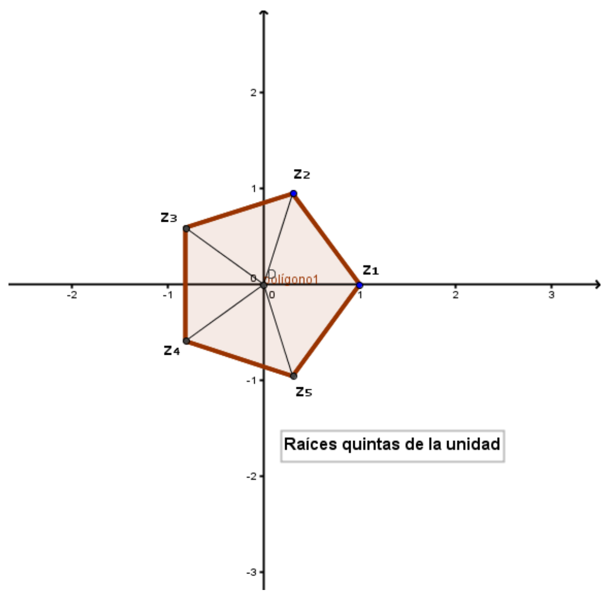



***Figura 3. Raíces quintas de la unidad***
Fuente: Adaptado de Geogebra

***Concepto de transformación***

Una transformación la podemos definir como una correspondencia entre elementos de dos conjuntos. Es una regla o asociación que asigna a cada elemento $x$ de un conjunto A un único elemento $y$ de un conjunto B; lo cual podemos así:

$$A - - - - -\!-\!\rightarrow B$$

$$x - - - - -\!-\!\rightarrow y = f(x)$$

Siguiendo a Murray (1991), si la variable $x$ representa un número complejo cualquiera es llamada una función (transformación) de una variable compleja.

***Transformación de variable compleja.***

Según González (2009), llamamos transformación o función de variable compleja f definida sobre un conjunto $D \subset \mathbb{C}$, como la regla que asigna a cada $z \in D$ un número complejo $w \in \mathbb{C}$.

$$f: \; D \subset \mathbb{C} \quad \to \mathbb{C}$$

$$z \quad \to f(z) = w$$

D es el dominio de definición de la transformación.

$$w = \; f(z) = u(x, y) \; + \; iv(x, y)$$

$$z = x + iy, \qquad u = \; \Re e f(z) = \Re e\, w, \qquad v = \Im m\, f(z) = \Im m\, w$$

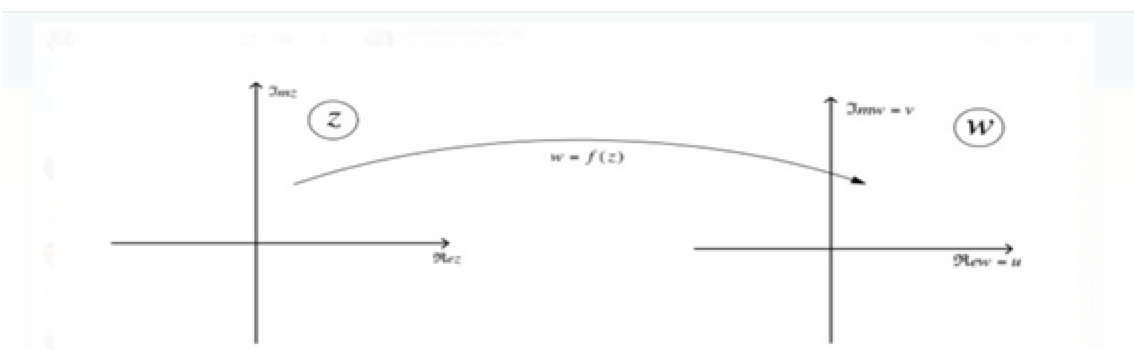



***Figura 4. Función de argumento complejo***
Fuente: Recuperado de González y Martínez (2009, p. 51)

***Transformación lineal***

Es una transformación de la forma $w = \alpha z + \beta, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$. La cual podemos interpretar de las siguientes formas:

1. Si $\alpha = 0$. Luego $w = \beta$. Esta transformación o mapeo, lleva a todo punto del plano $P$ a un único punto en el plano $p'$ .
2. Si $\alpha \neq 0$ , $\beta = 0$. Entonces $w = \alpha z$.

   En esta transformación los puntos del plano p sufren una dilatación del radio y una rotación del ángulo.
3. $w = \alpha z + \beta$. Con $\alpha \neq 0\ y\ \beta \neq 0$.

Esta transformación se puede interpretar como una sucesión de las dos anteriores, en la cual se presenta una traslación y simultáneamente una dilatación y rotación del ángulo. En este tipo de mapeo los ángulos se conservan, es decir son Mapeos Conformes, puesto que rectas se transforman en rectas y circunferencias en circunferencias.

***Transformación Inversa***

La transformación inversa o mapeo inversión es dela forma $w = \frac{1}{z}$ , $z \neq 0$, Esta transformación prodúcelos siguientes efectos:

- Circunferencias del plano P son transformadas en circunferencias en el plano P´
- Circunferencias que pasan por el origen en P se transforman en rectas en el plano P´
- Rectas que no pasan por el origen en el plano P se transforman en circunferencias que pasan por el originen el plano P´.
- Rectas que pasan por el origen en el plano P, son transformadas en rectas que también pasan por el origen en P´.

***Transformación cuadrática***

Es una transformación de la forma $w = f(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$. Donde $\alpha, \beta, \gamma\ \in \mathbb{C}\ y\ \alpha \neq 0$. El caso más elemental de esta transformación es la expresión:

$w = f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$

Por ejemplo el número complejo $z = 2 + i$ es tranformado en el número $w = 3 + 4i$.

Además, esta transformación mapea rectas del plano $p$ en curvas (parábolas) en el plano $p'$.

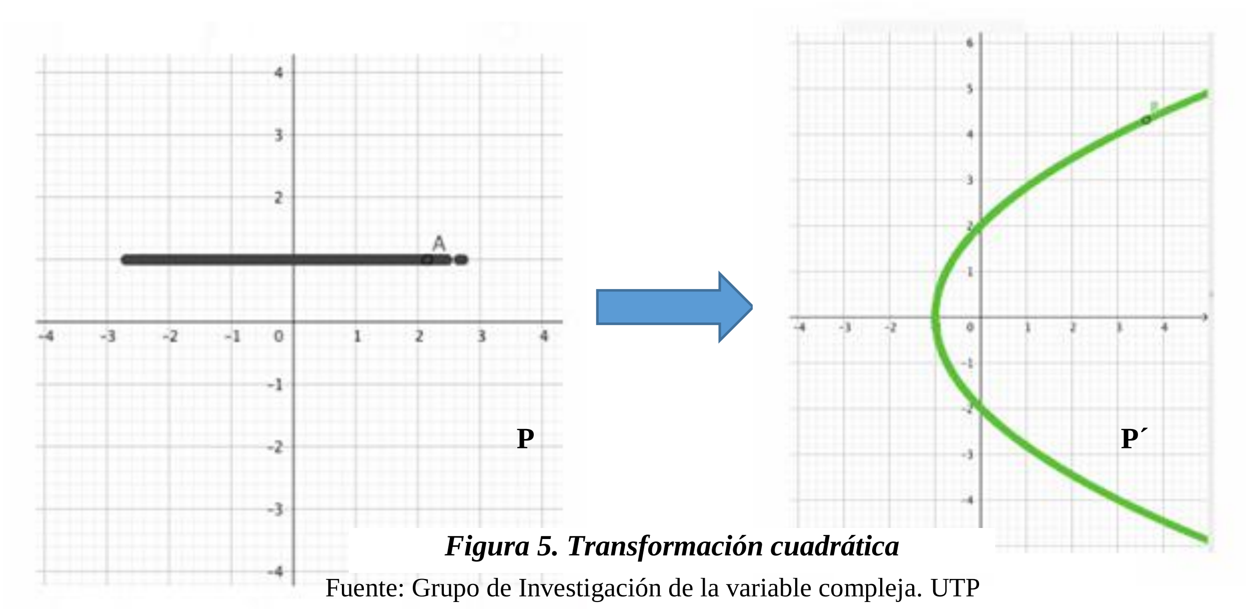



***Figura 5. Transformación cuadrática***

Fuente: Grupo de Investigación de la variable compleja. UTP

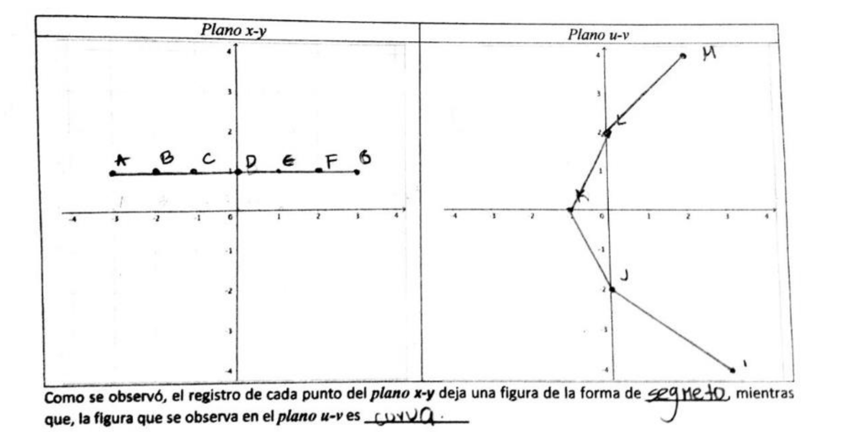



***Figura 6. Respuesta de un estudiante sobre transformaciòn cuadrática***

Fuente: Investigación del autor

## 5.4 Ingeniería Didáctica

La noción de ingeniería didáctica se introdujo en la didáctica de la matemática francesa a comienzos de la década de los 80. Según Artigue (1995) "Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico" (p. 33).

### *Características generales*

Para Artigue (1995) "la Ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las secuencias didácticas realizadas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de estas. Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la micro-ingeniería y el de la macro-ingeniería" (p. 36)

Por otra parte, De Farias (2006) menciona "El término ingeniería didáctica se utiliza en la didáctica de la matemática con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje". Sobre esto De Farias (2006) expone las palabras de Duady (1996, p. 241):

> …el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las relaciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de un adaptación de la puesta en

> funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. (De Farias, 2006, p. 2)

Esta idea es apoyada por las investigadoras Calderón y León (2006), quienes consideran que:

> Una característica fundamental de este tipo de metodología de investigación es la confrontación entre los análisis a priori sobre los diseños de actividades de aula y los análisis a posteriori sobre los corpus que se producen en la implementación de las tareas, como la forma básica de validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (p. 4)

***Fases de la Metodología de la Ingeniería Didáctica***

Esta metodología de investigación consta de cuatro fases:

- Primera fase: Análisis preliminar.
- Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
- Tercera fase: Experimentación.
- Cuarta fase: Análisis a posteriori y evaluación.

**Primera fase:** En la que se busca profundizar sobre: el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis de las concepciones, de las dificultades y de los obstáculos que determinan su evaluación y, finalmente, de las restricciones donde se va a situar la acción didáctica. Artigue et al (1995) destacan que *"*los estudios preliminares tan solo mantienen su calidad de preliminares en su primer nivel de elaboración*"* (p.34). Posteriormente estos estudios van tomando distintos lugares y funciones en la investigación, de acuerdo a los planteamientos de los objetivos específicos de la investigación.

**Segunda fase**: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas: Tradicionalmente, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva; se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha diseñado y se va a proponer a los alumnos: Se describen las elecciones locales (relacionándolas con las globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden. Se analiza qué podría aprender en esta situación un estudiante en función de las posibilidades de acción, decisión, control y validación de las que dispone, una vez puesta en práctica, cuando trabaja independientemente del profesor. Se preveén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje.

Sobre esto Godino et al (2013) conceptualizan que:

> Este análisis a priori se debe concebir como un análisis del control del sentido. De forma muy esquemática, si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la Teoría de las situaciones didácticas, que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería didáctica, ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría del control de las relaciones entre el sentido y las situaciones. (p. 8)

**Tercera fase:** Experimentación: Es la fase de la ingeniería didáctica donde el investigador tiene contacto directo con cierta población de estudiantes objeto de la investigación. Para el desarrollo de esta fase, el investigador debe explicitar de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participaran de la experimentación, asimismo establecer un contrato didáctico y finalmente aplicar los instrumentos de investigación diseñados de acuerdo con el problema de investigación. (Campeón, 2016, p. 64).

**Cuarta fase**: Análisis a posteriori y evaluación: Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc. La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis, a priori y a posteriori. Según Artigue (1998):

> En la mayoría de los textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los dos análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones. Estas están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación; esto es, no se busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constatadas invalidan. Con frecuencia, los autores se limitan a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas, sin comprometerse en realidad con un proceso de validación. (p. 49)

Las hipótesis mismas que se formulan explícitamente en los trabajos de ingeniería son a menudo hipótesis relativamente globales que ponen en juego procesos de aprendizaje a largo plazo. Por esto, la amplitud de la ingeniería no permite necesariamente involucrarse en verdad en un proceso de validación.

## 5.5 El Geoplano

Para esta investigación el geoplano, en sus diversas presentaciones, tales como el cuadrado, el circular, el triangular, el circulo unitario o circulo goniométrico; se constituyen en una herramienta didáctica muy valiosa puesto que no solamente permite al estudiante la posibilidad de la manipulación de los mismos, sino también la oportunidad de fijar el conocimiento, adquirir nuevos conocimientos y especialmente contribuir en el desarrollo del pensamiento abstracto a través del desarrollo de actividades basadas en operaciones concretas y en forma inductiva, tal como lo propone Piaget, en su teoría cognitiva.

***Generalidades sobre el Geoplano***

Un geoplano matemático, según Cáceres y Barreto (2011), “es un elemento didáctico que ayuda a introducir y afianzar gran parte de los conceptos de la geometría plana, al ser una herramienta concreta permite a los estudiantes obtener una mayor comprensión de diversos términos de esta materia” (p. 2).

El Geoplano, en sí es un tablero, que posee unas cuadrículas de la medida que necesite quien va a hacer uso de él, en cada una de las esquinas de cada cuadrado se clavan o insertan clavos, tachuelas o el material que le sea proporcionado, de tal manera que éstos sobresalen de la superficie de la madera unos 2 cm. El tamaño del tablero es variable. El trozo de madera utilizado no puede ser una plancha fina, ya que tiene que ser lo suficientemente grueso -2 cm. Aproximadamente- como para poder insertar los clavos de modo que queden firmes y que no se ladeen. Sobre esta base se colocan gomas elásticas de colores que se sujetan en los clavos formando las figuras geométricas que se deseen.

De acuerdo con lo anterior, podemos decir que un geoplano o plano de geometría, es una herramienta que facilita la enseñanza – aprendizaje de la geometría, en aspectos tales como ángulos, polígonos, semejanza, simetría, entre otros. Además, permite que el estudiante aprenda y descubra relaciones de conceptos abstractos, logrando de esta forma integrar contenidos de la geometría, la aritmética, el álgebra, la trigonometría y el cálculo, es decir, el geoplano puede considerarse como una herramienta integradora de los contenidos matemáticos.

Al respecto, en su libro Actividades con el Geoplano, Gutiérrez y Fernández (1985), plantean:

El objetivo prioritario del uso del geoplano está en descubrir propiedades geométricas mediante la manipulación directa y construcción de figuras con los clavos y las gomas. Según los estudios hechos por Piaget, los alumnos de los ciclos iniciales y medio se encuentran en estadios de evolución en los que necesitan ineludiblemente la ayuda de materiales concretos. En el ciclo superior, el Geoplano sirve como laboratorio de ensayo para que los alumnos puedan elaborar sus propias conjeturas y las comprueben, iniciándose así en el razonamiento lógico y deductivo imprescindible para poder entender las demostraciones formales que encontraran en los años siguientes. (p.9)

Éste planteamiento permite tener claridad sobre las posibilidades que en materia pedagógica podemos explotar del Geoplano, en particular en la construcción del concepto de número lateral ya que al proponer el estudio de éste objeto matemático como un par ordenado, instrumentos como el plano cartesiano, el Geoplano y el círculo unitario son de gran utilidad.

***Figura 7. Estudiantes trabajando con los geoplanos***
Fuente: Proyecto de investigación

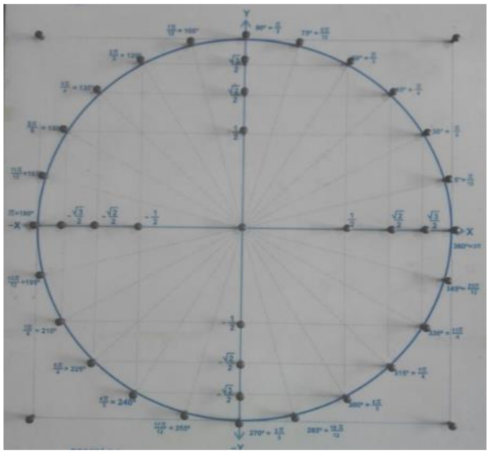


*Figura 8. Cìrculo unitario*

Fuente Ilustración propia

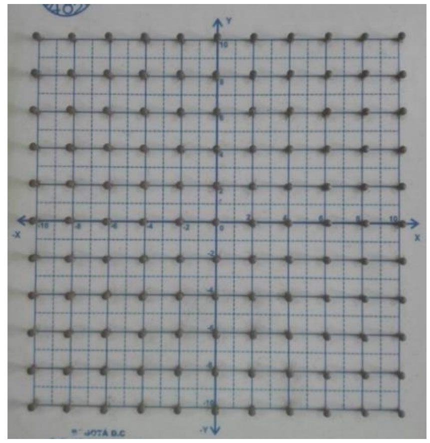


*Figura 9. Geoplano cuadrado*

Fuente Ilustración propia

Además, el uso del Geoplano, permite el desarrollo de trabajo colaborativo entre los estudiantes del grado décimo B, de la Institución Educativa Empresarial, ya que no solamente hicieron uso de ellos como material didáctico, sino que también los construyeron con ayuda de sus compañeros y de sus padres.

### 5.6 El uso de las tecnologías en educación

El uso e implementación de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación TICs, es una realidad que permea nuestro entorno en todos los niveles, llámese económico, social, político, cultural, educativo, entre otros; que pese a su evolución continua tanto en la creación de hardware como de software, nos plantea múltiples alternativas, aunque en algunos casos nos encontramos un poco rezagados en cuanto al uso y aprovechamiento de la infinidad de posibilidades que nos brindan tanto en lo recreativo como en el campo del saber.

La implementación de las TICs en educación data de más de veinte años y específicamente en el área de matemáticas en el año de 1999, el MEN propuso los Lineamientos Curriculares, vistos desde el ámbito de que sirvan como herramienta que contribuya al uso continuo de las TICs al interior del aula de clase, que sirva de enlace o "mediadores" entre el currículo de matemáticas y los estudiantes.

Pese a esto, en nuestro entorno no son muy aprovechadas, quizás por el temor o rechazo que genera en algunos docentes, ya que consideran una amenaza en cuanto a que la tecnología pueda reemplazar su labor, por la falta del recurso tecnológico y por parte de los estudiantes que no la utilizan como herramienta que contribuye a elevar su nivel cognitivo y a desarrollar los procesos de aprendizajes trabajados desde el área de la matemática, a saber: el razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comprobación y ejercitación de procedimientos; todos ellos asociados a los diversos niveles de pensamiento del área y al contexto del discente.

El siguiente esquema, propuesto en el documento mencionado anteriormente, sintetiza lo expresado anteriormente.


***Figura 7. Procesos articuladores de las Tics y Matemáticas***
Fuente: MEN, (1999, p. 12)

El uso de la tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, aparte de contribuir en la adquisición de manera creativa, dinámica e innovadora de los conocimientos facilita la parte motivacional en los estudiantes, puesto que elementos como las Tablet y los teléfonos inteligentes (Smartphone), son muy utilizados de manera natural por los jóvenes y deben ser utilizados también como herramienta de aprendizaje. Al respecto Marqués (1999), citado por Suazo (2015), manifiesta lo siguiente, el uso del software educativo tiene las siguientes funciones:

- Función motivadora y de animación: suelen catar la atención de los estudiantes.
- Función instructiva: Los programas tutoriales realizan de manera explícita la función.
- Función informativa: Los programas educativos a través de sus actividades proporcionan una información estructurada de la realidad de los estudiantes. Los videos tutoriales, base de datos o buscadores académicos cumplen esta función.

- Función evaluativa de actitudes y conocimientos: evalúa explicita e implícitamente el trabajo de los alumnos.
- Función investigadora: programas académicos, base de datos, ofrecen al discente entornos donde investigar.
- Función Expresiva: Los estudiantes expresan a la computadora (a través de elementos informáticos) y otros compañeros a través de las diferentes actividades, se da principalmente cuando se utilizan suites ofimáticas, lenguajes de programación y porque no, software matemáticos.
- Función innovadora: los programas educativos se suelen considerar materiales didácticos ya que suelen utilizar la tecnología más reciente.
- Función lingüística: pueden aprender lenguajes propios de la informática.
- Función lúdica: Crea ambiente de armonía en los alumnos. (Suazo, 2015, p. 36)

Estas funciones nos permiten entender con claridad el papel que juegan tanto los estudiantes como los docentes al hacer uso de las TICs en la implementación del currículo de matemática y la evaluación de los contenidos, de ahí la importancia del juego Enigma, cuya participación y disfrute depende de los conocimientos adquiridos sobre los números laterales.

El uso de Excel, hoja de cálculo muy utilizada y de gran familiaridad por parte de los estudiantes al igual que el software Geogebra, software educativo libre, de gran aplicabilidad para la enseñanza aprendizaje de la Geometría, en forma dinámica y activa; permitieron el uso de la tecnología para la aplicación de la propuesta.

## 5.7 Escala Likert

La **escala de Likert**, debe su nombre al psicólogo organizacional estadounidense Likert (1903-1981). Es una escala de tipo psicométrico, que se utiliza en investigación. La escala es empleada para analizar cuestionarios, en los que al responder una pregunta el encuestado tiene diversas alternativas que permiten evidenciar el grado de satisfacción máxima o de insatisfacción, pasando por una opción intermedia. Regularmente el número de alternativas de respuesta es un número impar. Al finalizar la escala permite realizar un análisis de las respuestas tanto vertical como horizontal.

Para Malavé (2007), la escala Likert puede tener las siguientes alternativas:

5 Muy de Acuerdo.

4 De Acuerdo.

3 Ni de acuerdo ni en desacuerdo.

2 En desacuerdo.

1 Muy en desacuerdo. (Malavé, 2007, p.8)

En este trabajo investigativo se hace uso de una escala Likert, para hacer un análisis tanto horizontal como vertical (cuantitativo y cualitativo) de los resultados de las evaluaciones efectuadas a los estudiantes del grado décimo B, para verificar el dominio y comprensión de los números complejos, llamados también números laterales.

# 6. Diseño Metodológico

## 6.1 Enfoque mixto de la investigación

Teniendo en cuenta que esta investigación tiene por objeto elaborar una propuesta didáctica para el aprendizaje del número lateral, en estudiantes de grado décimo, de la Institución Educativa Empresarial, corresponde a una investigación de corte mixto, tal como lo propone Echavarría (2017). La presentación que desarrollamos da cuenta de lo trascendental que es acudir a los métodos de investigación de tipo mixto, incluso desde los diversos tipos de clasificación de estos en las ciencias sociales y aplicación al análisis de los informes de investigación, en este caso que nos lo proporciona Echevarría (2017) y Pereira (2011).

Estos autores y otros, nos evidencian las grandes posibilidades de llevar mucho más allá los métodos de investigación cuantitativa y cualitativa desde sus alcances y limitaciones a la hora de optar por una apuesta de tipo mixto, en la que permiten surgir desde unos parcialmente integrados a otros totalmente integrados y en el que admite muchas posibilidades para dar cuenta de los resultados de investigaciones que se lleven a cabo bajo esta modalidad.

Ahora bien, estas posibilidades se expresan a través de la triangulación mediante la comparación y uso del método cuantitativo y cualitativo que dan una inconmensurabilidad a los resultados de los procesos de investigación por lo que es cuestionado, así mismo entra en juego la complementación cuyo fin es la elaboración, mejora, ilustración y aclaración de los resultados de un método con los resultados de otro método a partir, o dependiendo, cual se subsume frente al otro, o el de combinación que da cuenta también de la integración de dichos métodos para fortalecer la validez de la investigación en la compensación de las debilidades de cada uno de ellos, es decir, es el apoyo mutuo fuerte que ambas se proporcionan a la hora de presentar resultados de la investigación.

| Lógicas | Greene et al. (1989) | Bericat (1998) |
|---|---|---|
| Independencia de métodos; convergencia, confrontación de resultados | Triangulación<br>Iniciación | Triangulación |
| Un método colabora con el otro; dependencia de métodos, uno modifica al otro | Desarrollo | Combinación |
| Un método colabora con el otro, complementación de resultados, independencia de métodos (uno no modifica al otro) | Complementación<br>Expansión | Complementación |

***Figura 8. Triangulación de diferentes metodologías***
Fuente: Recuperado de Echavarría (2017, p. 12)

En estos aspectos es enfático y detallado Echavarría (2017), al describir las distintas formas de integrar los diferentes métodos de investigación cuantitativo y cualitativo en uno nuevo mixto, en diferentes tipologías para acometer y dar cuenta de los resultados de investigaciones bajo esta modalidad y que acudimos para ilustrarlo sobre la base de uno de los cuadros presentados por el autor en mención:

| Tipo | Monocomponente | Multicomponente |
|---|---|---|
| Monométodo | Celda 1<br>Diseños monométodo monocomponente<br>1. Diseño tradicional cuantitativo<br>2. Diseño tradicional cualitativo | Celda 2<br>Diseños monométodo multicomponente<br>1. Monométodo paralelo<br>a. CUAN+CUAN<br>b. CUAL+CUAL<br>2. Monométodo secuencial<br>a. CUAN→ CUAN<br>b. CUAL→ CUAL |
| MM | Celda 3<br>Diseño cuasi mixto monocomponente<br>1. Diseño de conversión monocomponente | Celda 4<br>Diseños de MM multicomponente<br>1. Mixto paralelo<br>2. Mixto secuencial<br>3. Mixto de conversión<br>4. Mixto multinivel<br>5. Mixto totalmente integrado<br>Cuasi mixto multicomponente |

***Figura 9. Matriz de los métodos y componentes mixtos de Teddlie y Tashakkori (2009)***
Nota: La sigla MM significa Métodos Mixtos. Recuperado y adaptado de Echavarría, 2017, p. 11

Como vemos, el método de investigación mixta, en sus desarrollos tiene muchos componentes, correspondencias, interacción, entre otros en los diversos procesos de investigación y resultados en procesos de investigación desarrollados con la modalidad en cuestión, Al respecto Echevarría (2017) dice:

> Sobre todo, no solamente posibilita ver la integración de métodos cualitativos y cuantitativos como una cuestión de grado, sino, además, facilita avanzar en caracterizar el tipo de integración que se da, es decir, la lógica que subyace en la misma, y esto permite un análisis más adecuado de la validez de los estudios mixtos. (p. 14)

Por otra parte, tenemos que el método de investigación mixta en el campo educativo también ha cobrado fuerza a la hora de dar explicaciones a muchos fenómenos y problemáticas en el campo y mejorarla, podemos decir, que ya no se queda en los meros planteamientos de los problemas educativos, sino que permite la intervención posible de solucionarlos, darle salida y provocar mejores climas educativos al interior de la sociedad.

Cualquier investigación en el campo educativo suele estar permeada de buenas intenciones y del deseo de los investigadores y las investigadoras de brindar un aporte a dicho campo, ya sea para conocer un fenómeno, para profundizar en temáticas anteriormente abordadas, o también, para buscar cambios y transformaciones específicas o sociales, a partir de los conocimientos que estudios previos hayan aportado. En esa línea Pereira (2011) valida el diseño de estudios mixtos diciendo: "Independientemente del objetivo de estas, todas buscan la comprensión, profundización o transformación de aspectos en el campo educativo. En esa perspectiva de búsqueda, los diseños mixtos pueden constituirse en un aporte para dicho objetivo". (Pereira, 2011, p. 16)

Podría decirse entonces según Pereira (2011), que muchos problemas educativos suelen ser abordados bajo esta mixtura metodológica de investigación como por ejemplo los procesos de aprendizajes, estrategias didácticas de enseñabilidad y educabilidad, características de formadores docentes, alumnos, clima educativo, tipos de contenidos curriculares, opiniones acerca de los docentes y tipos de docentes, los progresos académicos de los estudiantes, los desempeños escolares, la eficiencia y ambientes escolares entre muchos aspectos del mundo educativo.

En este sentido podemos reafirmar lo que dice nuestra autora en mención:

> Es igualmente válido destacar que existen muchas y variadas formas de acercarse a una temática de estudio, las cuales van en concordancia con la posición epistemológica de los investigadores y las investigadoras, los recursos de que disponga, el esfuerzo por la recuperación de datos cuantitativos o cualitativos, los fines de la investigación, el interés por adquirir nuevos conocimientos, profundizar en conocimientos ya construidos o promover cambios como parte de los procesos investigativos, entre otras razones. No obstante, lo dicho, el presente ensayo contextualiza una experiencia concreta, mediante el uso de diseños

> de método mixto, que se considera puede ser de utilidad para la comprensión de temáticas educativas. (Pereira, 2011, p. 27).

Ahora bien, la presente investigación se orienta bajo los postulados del método mixto que acabamos de describir. En primer lugar, nos movilizamos desde el punto de vista de las categorías de didáctica, número, números complejos, el geoplano y la ingeniería didáctica para analizar los diversos fenómenos de la enseñanza aprendizaje de los conceptos básicos de la variable compleja, tomando como grupo focal el grado 10B de la Institución Educativa Empresarial del Municipio de Dosquebradas Risaralda.

En segundo lugar, acudimos a las técnicas de recolección de la información cuantitativas, tales como la encuesta (a docentes y estudiantes), pre-test, pos-test que nos permitió obtener información estadística sobre la metodología desarrollada en el aprendizaje de los elementos básicos de la variable compleja y luego trianguladas con las categorías analíticas ya enunciadas entre estudiantes y docentes a través de instrumentos como la escala Likert, que permitió identificar diversas problemáticas tales como, la orientación metodológica, la dificultad de los estudiantes en abordar problemas donde apliquen el concepto de número complejo y sus transformaciones, entre otros aspectos que dilucidamos más adelante y que permitió la construcción de una propuesta didáctica alternativa para la enseñanza aprendizaje de los números complejos, basadas en la parte geométrica y el uso de las tecnologías y de material concreto como el caso de los diversos geoplanos.

El diseño de esta investigación está basado en la Ingeniería Didáctica, que se sustenta en la teoría de las situaciones didácticas planteadas por Guy Brousseau (1995), la cual es pertinente cuando se trata de indagar sobre la manera como los estudiantes adquieren conocimientos y permite de manera flexible que el investigador elabore sus propias secuencias didácticas de enseñanza, para mediar en la comprensión de los saberes matemáticos que desea potenciar en los estudiantes.

***Tabla 1.*** *Resumen de las cuatro fases de la ingeniería didáctica y actividades a realizar*

**Fases del diseño metodológico según la Ingeniería didáctica**

| **Fase** | Objetivo | Actividad |
|---|---|---|
| **Fase 1: Análisis preliminares** | Conocer los aspectos históricos, epistemológicos, didácticos y cognitivos implicados en el proceso de enseñanza de los números laterales. | Revisión bibliográfica de las principales dificultades epistemológicas y didácticas en el aprendizaje de los números laterales.<br>Análisis de las concepciones de los docentes en la enseñanza del número lateral.<br>Análisis de las concepciones de los estudiantes respecto al aprendizaje de los números laterales. |
| **Fase 2: concepción y análisis a priori.** | Identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven problemas y situaciones de su entorno donde apliquen conceptos sobre números laterales. | Diseño y construcción y desarrollo de una situación a-didáctica sobre problemas aplicativos de la variable compleja.<br>Análisis de los resultados de la situación a-didáctica para identificar las principales dificultades de los estudiantes en la aplicación de los conceptos inherentes a la variable compleja. |
| **Fase 3: Experimentación.** | Elaboración y análisis de una propuesta didáctica para el dominio y comprensión de los conocimientos básicos de la variable compleja. | Diseño, elaboración y aplicación de situaciones didácticas asociadas a la variable compleja.<br>Análisis de la comprensión alcanzada por los estudiantes al desarrollar las situaciones didácticas. |

| | | |
|---|---|---|
| **Fase 4: Análisis posterior y validación** | Validar el nivel de aprendizaje de los estudiantes sobre la variable compleja a través de la participación y disfrute del juego Enigma. | Análisis de los datos obtenidos a lo largo de la experimentación.<br><br>Confrontación del análisis a priori y a posteriori de los niveles de comprensión alcanzado por los estudiantes sobre la variable compleja. |

Fuente: Elaboración propia

## 6.2 Análisis preliminar

La metodología de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases y según Artigue (1995), considera tres dimensiones en su desarrollo, que son la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica.

### 6.2.1 Análisis epistemológico de la variable compleja

En este apartado conoceremos el desarrollo histórico, los obstáculos que enfrentó, los momentos históricos de las sociedades que discutieron y las motivaciones que impulsaron el estudio de la variable compleja con el fin de que el estudiante y el docente valoren su devenir histórico y lo incorporen a su formación académica e intelectual.

***Historia de los números complejos***

De acuerdo con Kline (1972) “Los números complejos son considerados la creación más originaria del siglo XIX, la variable compleja es una de las ramas más fértil de la matemática, la alegría del siglo y una de las ramas más armoniosas de las ciencias abstractas”. (p.828).

La historia de este conjunto numérico está estrechamente relacionada con el álgebra, la resolución de ecuaciones cúbicas, cuartas y con el álgebra lineal en general. Desde la época de los griegos ya se habla de su existencia; por ejemplo, Herón de Alejandría en su obra Estereometría, hace mención de las raíces cuadradas de cantidades negativas; pero debido a que en esos tiempos los números eran considerados desde el punto de vista de las magnitudes o como una medida, no se profundizó en su estudio, a pesar de que en la solución de algunos problemas se llegaba a la raíz cuadrada de cantidades negativas.

En el siglo $III$, el matemático Diofantes, en su obra aritmética, plantea problemas como hallar los lados de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 12 y de área 7; cuya solución son números complejos.

En siglos posteriores con los avances del álgebra, especialmente con los aportes de los matemáticos hindúes, en temas como la solución de ecuaciones y el estudio de expresiones con variables, aparecen los aportes de otros personajes que con sus contribuciones van dando forma al estudio de los complejos, como un conjunto numérico de trascendental importancia que permite dar solución a situaciones que con los sistemas de números ya conocidos no era posible solucionar, cual es el caso de la ecuación: $x^3 = 15x + 4$.

Más tarde Niccolo Fontana (1499 – 1557), conocido como Tartaglia, ganó una competencia en 1535 demostrando una fórmula para resolver ecuaciones cúbicas, situación que hasta ese momento era visto como algo imposible ya que se requería de raíces cuadradas de cantidades negativas (Mastín, 2010), citado por Suazo (2015, p. 24)

**Giroldamo Cardano** (24 de septiembre de 1501 – 21 de septiembre de 1576), fue un médico notable, además de un célebre matemático italiano del Renacimiento, astrólogo, y filósofo. Es quien en su intento de dar solución a la ecuación de tercer grado da cuenta de la existencia de soluciones imaginarias, las cuales inicialmente llamo Sofisticas; es decir las hallaba convincentes y aparentemente legítimas, aunque concluía que eran inaceptables. A pesar de su confusión se puede decir que su gran aporte fue haber operado con ellos, aunque no supiera su significado, y comprender que en ellos se presentaba algo nuevo que no podía ser descartado.

Cardano, en su libro Ars Magna (1545), hace un tratado del álgebra y específicamente sobre las ecuaciones de tercer y cuarto grado, publica además sus descubrimientos sobre la existencia de números con raíces cuadradas negativas y de sus operaciones. La publicación de esta obra generó una controversia entre Niccolo Fontana, puesto que él le había compartido su estrategia para la solución de ecuaciones cúbicas; con quien Cardano había jurado no develar el secreto de la resolución de tales ecuaciones; no obstante, Cardano consideró que el juramento había expirado tras obtener información de otras fuentes por lo que polemizó con Tartaglia. En realidad, el hallazgo de la solución de las ecuaciones cúbicas no se debe ni a Cardano ni a Tartaglia ya que Scipione Del Ferro había hallado una primera fórmula hacia 1515.

Según Rivero (2001), Cardano propuso un método de solución para ecuaciones de la forma $x^3 = ax + b$ , cuya solución es la expresión $x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}$

Veamos la solución de la ecuación $x^3 = 15x + 4$ mediante este método:

Se tiene que $a = 15,\ b = 4$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{15^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{15^3}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}$$

$$= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

Pero sabemos que la solución es $x = 4$ ya que, $4^3 = 15 * 4 + 4$

Ahora bien $\sqrt{-121} = \sqrt{121} * \sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}$ y si $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1\ entonces\ \left(\sqrt{-1}\right)^3 = -\sqrt{-1}$

Desarrollando el binomio $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 * 2^2\sqrt{-1} + 3 * 2\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3$

$$= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - 1 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Al igual que

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

De esta forma:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Según Nahin (2008, p.50), las raíces de cantidades negativas eran consideradas ficticias, absurdas, falsas e inaceptables. Es René Descartes (1637), en su obra sobre Geometría, quien da el nombre de cantidades imaginarias a las raíces cuadradas de cantidades negativas. En ella plantea la forma de resolver operaciones aritméticas y ecuaciones de diversos grados de manera geométrica, llamando problemas planos a los que es posible resolver mediante círculos y rectas y las que no era posible geométricamente, los llamó imposibles y cuyas raíces son imaginarias. Al respecto Arredondo (2017), plantea:

> Descartes es reconocido por dar el nombre a los números imaginarios, solo se los podía imaginar, pues no tiene forma de construirlos geométricamente. Este es el sentido que les da: existen solo en la imaginación, al no tener representación geométrica de ellos. Aunque su obra no menciona la palabra número, siempre se refiere a los valores de la cantidad desconocida. Este hecho indica una posible influencia del concepto de número que se asume, él manejaba. Al igual que Cardano, Descartes reconoce y acepta los números imaginarios: les da un sentido geométrico y algebraico. (p. 48)

Para la extracción de la raíz cuadrada Descartes (1637) propone el siguiente procedimiento:

> Si hay que extraer la raíz cuadrada de GH se le agrega la línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con este punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos FH, hasta I, es GI la raíz buscada. (Descartes, 1637, p. 51)

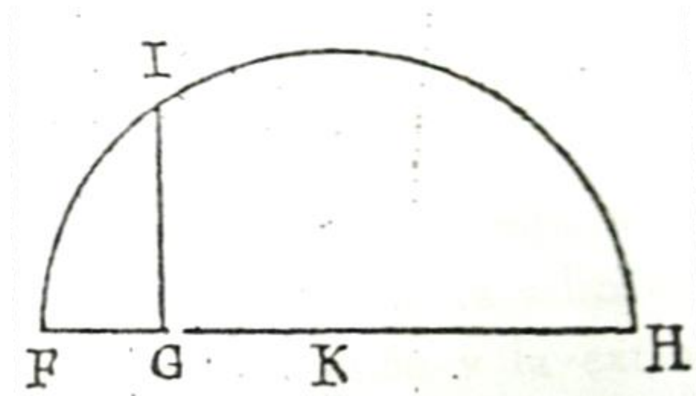



***Figura 10. Extracción de la raíz cuidrada en forma geométrica por Descartes***
Fuente: Descartes, 1637

Para extraer la raíz cuadrada de un número, Descartes compara dicho número con la longitud del segmento obtenido; es evidente que no contempla el cálculo de raíces negativas debido a la imposibilidad de construir segmentos negativos.

Además, Descartes para la solución de ecuaciones de la forma $z^2 = az + bb$, realiza la construcción geométrica para hallar la única raíz, hace referencia al hecho de que en caso de no poder encontrar el segmento este tipo de problemas serían Imposibles y cuyo proceso de solución es el siguiente:

> Construyo el triángulo NLM, cuyo lado LM es igual a $b$, raíz cuadrada de la cantidad conocida $bb$, y el otro lado LN es $\frac{1}{2}\,a$ , la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por $z$ que supongo ser la línea desconocida. Luego prolongando MN, base de ese triángulo, hasta O, de modo que NO sea igual a NL, la línea total OM es $z$, la línea buscada. (Descartes, 1637, p. 56)

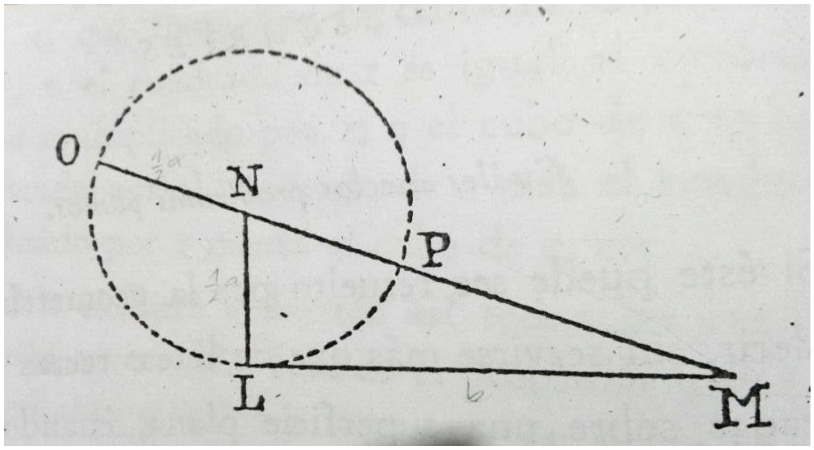



***Figura 11. Solución a la ecuación $z^2$=az+bb.***
Fuente: Descartes (1637, p. 57)

Es Leonhar Euler (1770), quien en su obra “Elementos del álgebra”, el que da el nombre de $i$ a $\sqrt{-1}$, opera con estas cantidades en el cálculo de logaritmos e integrales y nos legó su famosa ecuación $e^{i\theta}+1=0$, la cual relaciona números trascendentales, reales e imaginarios “laterales”. La idea de utilizar los números complejos como puntos del plano nace de la solución de la ecuación $x^n-1=0$, como los puntos de un polígono regular de n- lados (partición de la circunferencia unitaria).

El suizo **Jean Robert Argand** (1768-1822), en el año 1806, en su ensayo sobre como representar las cantidades imaginarias en las construcciones geométricas, es quien establece que el eje imaginario se puede considerar como una rotación de 90°, al establecer una analogía con la idea que permite definir las cantidades negativas como la manera de combinar la cantidad con la dirección. Desde entonces se considera el plano de los números complejos como el plano Argand; noción que estaba más orientada hacia la parte vectorial ya que consideraba el número complejo $z$ como $z=\ x+iy$. Situación similar a la que planteaba Leonard Euler, al considerar el número $z=r(cos\emptyset+isen\emptyset)$, notación que se conoce con el nombre coordenada polar de un complejo.

En 1831 el matemático **Carl Friedrch Gauss** (1777 – 1855), en su obra "Teoría sobre los residuos bicuadráticos" es quien logra posicionar el concepto de número complejo como una pareja ordenada $(a, b)$, planteando una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los números complejos; los cuales utilizó en su demostración del teorema fundamental del cálculo y que permitió su aceptación en la comunidad matemática debido a la autoridad que significaba este importante hombre del conocimiento matemático, en su época y en nuestros tiempos, hasta el punto de ser considerado uno de los más grandes matemáticos de la historia.

Gauss, formaliza los complejos como un conjunto numérico, definiéndolos como un número de la forma $z = a + bi$, donde $a, b$ son números reales, considera las unidades $+1, -1, +i$ y $-i$; como también considerando al conjunto de los números reales como un subconjunto de los complejos, define los conjugados de un complejo, las operaciones tales como la suma, la resta, la multiplicación y la división, las potencias y raíces.

Ya en 1883, William Rowan Hamilton (1805 -1856) plantea una definición más rigurosa de los números complejos como parejas de números reales. Bernhard Riemann (1826,1866), alemán y alumno de Gauss, en compañía de Cocuchy (Couchy – Riemann), propone la definición de función analítica: $f(x, y) = u + iv$. Estableciendo que u y v son funciones reales y planteando la existencia de un mapeo conforme del plano x –y al plano u – v, a través de función analítica.

Además, matemáticos como **Lagrange, Bernoulli, Lejeune, Dirichlet, Cauchy**, entre otros contribuyeron al desarrollo de la variable compleja y sus aplicaciones en las ingenierías, la electrónica, las ecuaciones diferenciales y el estudio de los fractales; las cuales forman parte de la llamada "matemática moderna".

Un Fractal, es un diseño artístico geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas. En muchos casos, los fractales pueden ser generados por un proceso recursivo capaz de producir estructuras auto-similares independientes de la escala específica tal como el fractal de Mandelbrot. Según Du Satoy (2012), la escala de crecimiento de las formas de los fractales constituyen su dimensión, las cuales incluyen cantidades decimales; tal es el caso de la costa matemática de Gran Bretaña, cuya dimensión fractal es de 1,26 y de otras formas que evidencian fractales en el espacio, cuya dimensión fractal oscila entre 2 y 3 tal es el caso del brócoli o de una coliflor. Estas ideas permiten cambiar el paradigma tradicional de las dimensiones enteras (una línea: una dimensión, un plano: dos dimensiones, un cubo: tres dimensiones). (p.108)

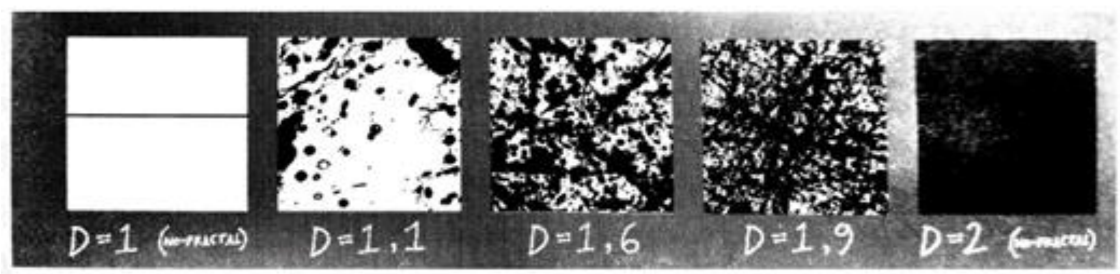



***Figura 12. Dimensiones al arrojar pintura en un cuadro***
Fuente: Du Satoy (2012, p. 109)

Para la construcción de los hermosos fractales en la actualidad, podemos hacer uso de las TICs, y específicamente de software como Geogebra y Excel, y una comprensión básica del plano de los números laterales, sus potencias cuadradas y de las transformaciones. Los fractales se obtienen iterando potencias cuadradas de puntos al interior y en la frontera del circulo unitario -que son los que convergen- y sumándoles una constante C, que es otro número lateral cualquiera llegando así a obtener figuras tan llamativas, que además se convierten acciones que el estudiante puede emprender, llegando de esta manera a una de las aplicaciones más evidentes de la potencialidad que nos brinda la comprensión de este objeto matemático, tal como lo muestran las siguientes figuras:

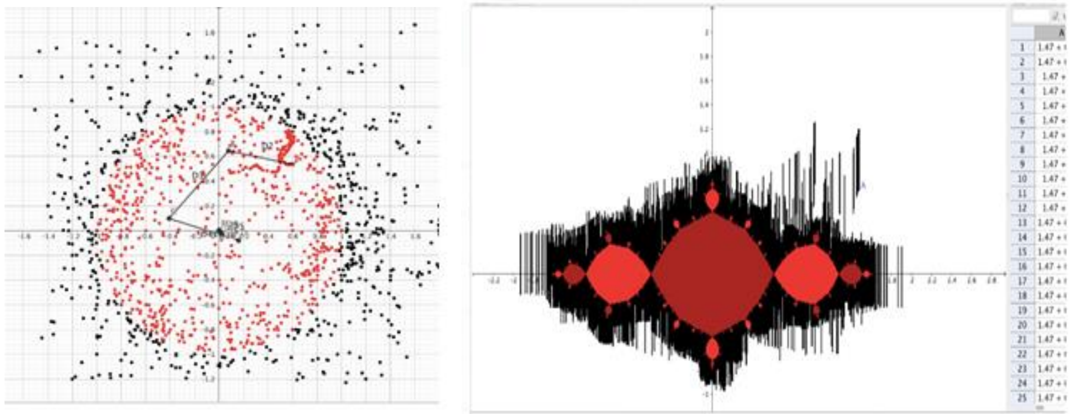


***Figura 13. Construcción de fractales***

Fuente: Grupo de investigación de la variable compleja, UTP

Al respecto sobre la importancia de los complejos, Suazo (2015) en su tesis de maestría, plantea:

> Hoy en día el análisis complejo es una teoría muy desarrollada que sin el aporte de matemáticos como Cardano, Leibniz, De Moivre, Euler, D'Alamber, Gauss, Cauchy, Weierstrauss y otros no se pudo lograr. Actualmente el análisis complejo tiene importancia en áreas diversas de las matemáticas como el álgebra, la geometría, el análisis, teoría de números, así como aplicaciones importantes en física y las diferentes ramas de las ingenierías. (p. 28)

Aportes estos que muestran la importancia que tiene la variable compleja en nuestro tiempo, hasta el punto de ser considerada uno de los mayores logros de la matemática del siglo XIX por sus importantes aplicaciones tanto en la matemática aplicada como en la ingeniería.

En el proceso de aprendizaje de la construcción de los fractales, los estudiantes requieren haber adquirido los conceptos amplios suficientes sobre las diversas formas de representación de números complejos, específicamente desde el punto de vista geométrico (punto del plano), seguido del dominio de las operaciones básicas con los números complejos, su representación geométrica, el concepto de simetría y semejanza, así como también del uso de herramientas tecnológicas, tales como Geograba y Excel, que llevan a un dominio completo del concepto.

### 6.2.2 Análisis de las concepciones de los docentes

El instrumento que fue desarrollado como pre-test por los estudiantes de grado décimo B de la Institución Educativa Empresarial (Anexo 3), también fue realizado por dos docentes del área de matemáticas, permitiendo obtener la siguiente información (Anexo 1):

El docente Carlos Gustavo Cruz, de la jornada de la mañana, con más de veinticinco años de experiencia, quien elabora correctamente el ejercicio, aunque manifiesta que la temática no se desarrolla en el colegio por falta de tiempo y del hecho de que no aparece en el currículo.

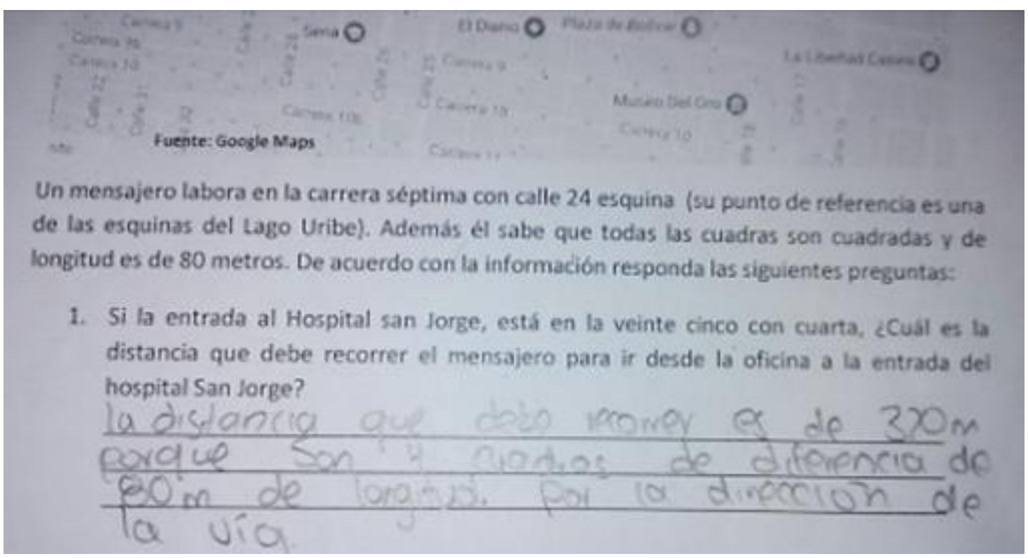
El docente José Gildardo Murcia, de la jornada de la tarde, estudiante de la maestría en Enseñanza de la Matemática, con más de diez años de experiencia, el cual también elabora eficazmente el ejercicio y plantea que pese a que la temática no aparece en el plan de estudio es muy importante abordarla debida a las potencialidades que brinda para elevar el nivel de formación de los estudiantes.

También se elaboró una encuesta a veinte docentes del área de matemáticas del municipio de Dosquebradas (Anexo 1), de la cual se concluye que la temática no se profundiza en la mayoría de los planteles educativos, no hay una metodología específica y por ende desconocen de su trascendencia para el fortalecimiento del pensamiento matemático.

### 6.2.3 Análisis de los resultados del pre – test

En esta parte de la investigación se desarrollaron dos ejercicios que se plantearon como situaciones a-didácticas, las cuales fueron elaboradas en grupos de tres estudiantes, al interior del aula de clase y que se describen a continuación: en la primera se pretende observar la manera como abordan un problema que consiste en la ubicación en el plano cartesiano de algunos lugares de la ciudad de Pereira (ver anexo 2), y el segundo ejercicio consiste en realizar operaciones con puntos en el plano tales como suma, resta, multiplicación y división, y su respectiva gráfica en el Geoplano rectangular, además algunas transformaciones de un triángulo (anexo 3).

***Figura 14. Participación de los estudiantes de las situaciones adidácticas***
Fuente: Investigación del proyecto



Fuente: Google Maps

Un mensajero labora en la carrera séptima con calle 24 esquina (su punto de referencia es una de las esquinas del Lago Uribe). Además él sabe que todas las cuadras son cuadradas y de longitud es de 80 metros. De acuerdo con la información responda las siguientes preguntas:

1. Si la entrada al Hospital san Jorge, está en la veinte cinco con cuarta, ¿Cuál es la distancia que debe recorrer el mensajero para ir desde la oficina a la entrada del hospital San Jorge?

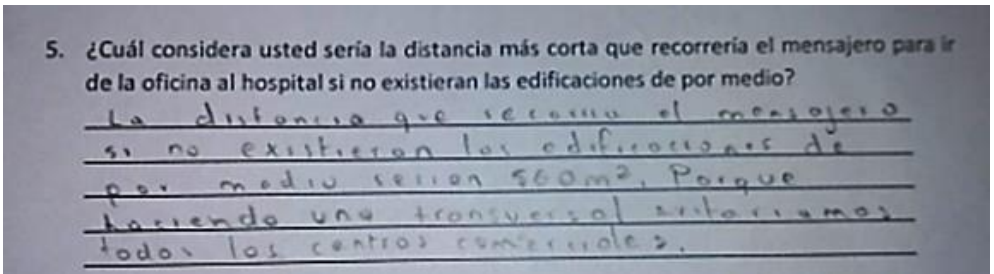
la distancia que debo recorrer es de 320m porque son 4 cuadras de diferencia de 80m de longitud. Por la dirección de la vía

***Figura 15. Respuesta de los estudiantes Situación a-didáctica***
Fuente: Autor

La figura nos muestra la respuesta dada por los estudiantes a la situación a-didactica, en la que se les plantea un problema en contexto, sobre la ubicación de algunos lugares de la ciudad de

Pereira (ver anexo 2), donde observamos que el joven tiene claridad sobre la ubicación de ciertos lugares de la ciudad; que se hacen corresponder con puntos del plano.

En ese mismo ejercicio, respecto a la pregunta número cinco, un grupo de estudiantes propone la siguiente respuesta:


5. ¿Cuál considera usted sería la distancia más corta que recorrería el mensajero para ir de la oficina al hospital si no existieran las edificaciones de por medio?

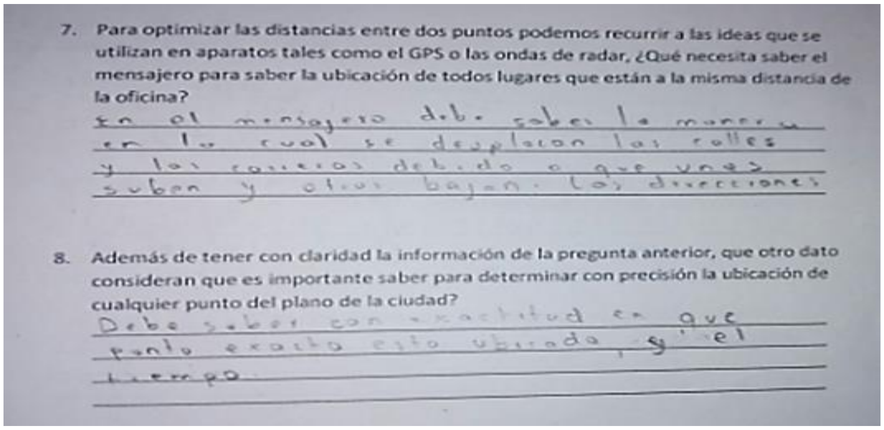
La distancia que recorria el mensajero si no existieran las edificaciones de por medio serian 560m², Porque haciendo una transversal evitariamos todos los centros comerciales.

***Figura 16. Respuesta a pregunta 5***
Fuente: Autor

Lo cual demuestra que el estudiante no tiene claridad sobre cual es la herramienta a utilizar para hallar dicho valor, o sea el teorema de Pitágoras por lo que el uso de estrategias didácticas que refuercen el tema como la propuesta en esta investigación, pueden llevarle a vivir una experiencia de aprendizaje transversal y en contexto.

Tambien en las pregunats 7 y 8, que tiene que ver con el radio de una circunferencia y el ángulo que forma alguno de sus puntos, un grupo de estudiantes propone la siguiente respuesta (ver figura 20), lo cual demuetra que los estudiantes no tiene claridad de esos conceptos de acuerdo con el contexto del problema.

Los resultados del primer ejercicio están sintetizados en la siguiente tabla de datos, en la que se efectúa un análisis tipo Likert de los resultados obtenidos por los estudiantes, efectuando una ponderación que va desde muy bien; que corresponde a las respuestas donde se evidencian que los procedimientos efectuados por el estudiante son correctos y que tiene la respuesta correcta, a la cual se le asigna un valor de cinco (5), hasta las muy mal; que corresponde a las preguntas donde el alumno no intenta resolverlas, por lo tanto no hay ningún proceso ni respuesta por parte del estudiante, a la que se le asigna una nota de uno (1). Tal como lo muestra la siguiente figura.


7. Para optimizar las distancias entre dos puntos podemos recurrir a las ideas que se utilizan en aparatos tales como el GPS o las ondas de radar, ¿Qué necesita saber el mensajero para saber la ubicación de todos lugares que están a la misma distancia de la oficina?

En el mensajero debe saber la manera en la cual se desplazan las calles y las carreras debido a que unas suben y otras bajan. Las direcciones

8. Además de tener con claridad la información de la pregunta anterior, que otro dato consideran que es importante saber para determinar con precisión la ubicación de cualquier punto del plano de la ciudad?

Debe saber con exactitud en que punto exacto esta ubicado, y el tiempo

**Figura 17. Respuesta de las preguntas 7 y 8**
Fuente: Autor

***Tabla 2.*** *Resultados encuesta a estudiantes*

| | | | | | | PREGUNTAS (P) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Grupo** | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 | Puntaje Promedio |
| **G1** | 5 | 2 | 3 | 5 | 5 | 5 | 1 | 1 | 4 | 3 | 1 | 3,18 |
| **G2** | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 | 3,18 |
| **G3** | 5 | 2 | 5 | 2 | 2 | 5 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 2,73 |
| **G4** | 1 | 3 | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2,09 |
| **G5** | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 5 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2,36 |
| **G6** | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1,82 |
| **G7** | 3 | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2,36 |
| **G8** | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2,27 |
| **G9** | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2,27 |
| **G10** | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 5 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2,36 |
| **G11** | 5 | 5 | 5 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2,82 |
| **Promedio** | 3,45 | 2,73 | 3,45 | 3,27 | 2,55 | 3,73 | 1,73 | 1,73 | 2,36 | 1,45 | 1,00 | 2,50 |

Fuente: Investigación autor

La tabla anterior nos muestra el resumen de los resultados de la evaluación realizada a los estudiantes del grado 10 B, en la que se calculan los promedios por pregunta y por cada estudiante.

De la información de la tabla anterior y con base en los siguientes cuadros estadísticos que resumen lo consignado en la tabla podemos concluir que el 82% de los estudiantes obtienen notas por debajo debajo de 3.0 (nivel bajo) y solamente el 18% consigue como nota máxima un 3,4 (nivel básico), lo que demuestra las dificultades en el uso de la información.

**Tabla 3.** Promedio de calificaciones

| Rango | Prom de Calificación | % |
|---|---|---|
| **[1, 2)** | 1 | 9% |
| **[2,3)** | 8 | 73% |
| **[3,4)** | 2 | 18% |
| **[4,5]** | 0 | 0% |

Fuente: Autor

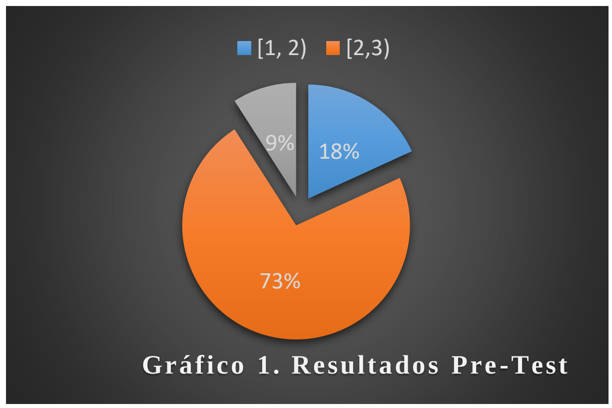


Gráfico 1. Resultados Pre-Test

Respecto al promedio obtenido en cada una de las preguntas formuladas a los estudiantes, se observa que únicamente en cuatro de las once preguntas formuladas se obtienen notas por encima de tres, siendo la nota máxima la pregunta 6 y la nota mínima es de 1,0 en la pregunta 11; tal como lo podemos observar en el siguiente gráfico.

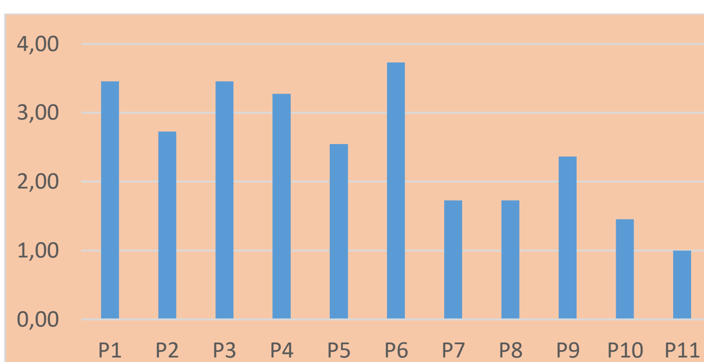


Gráfico 2. Promedio pregunta

Así mismo, el ejercicio relacionado con las operaciones entre puntos del plano y transformaciones en el plano, el cual condensamos en los gráficos y que nos permiten realizar las siguientes conclusiones:

***Tabla 4.*** *Conclusiones ejercicios de operaciones entre puntos del plano y transformaciones*

| | **PREGUNTA (P)** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Grupo** | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | Promedio Estudiantes |
| **G1** | 3 | 5 | 5 | 4 | 5 | 4,40 |
| **G2** | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2,20 |
| **G3** | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2,20 |
| **G4** | 3 | 1 | 4 | 4 | 3 | 3,00 |
| **G5** | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2,80 |
| **G6** | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 2,80 |
| **G7** | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1,20 |
| **G8** | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 | 2,60 |
| **G9** | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2,40 |
| **G10** | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2,00 |
| **G11** | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1,80 |
| **G12** | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2,40 |
| **G13** | 3 | 4 | 4 | 1 | 1 | 2,60 |
| **G14** | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2,60 |
| **G15** | 2 | 4 | 3 | 3 | 4 | 3,20 |
| **G16** | 2 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3,20 |
| **Promedio Grupo** | 2,25 | 2,8125 | 3,0625 | 2,5625 | 2,25 | 2,588 |

Fuente: Autor

Éste ejercicio se realiza en grupo de dos estudiantes, se formulan cinco preguntas asociadas a las operaciones y transformaciones y cuyos resultados se sintetizan en las siguientes tablas:

***Tabla 5.*** *Porcentajes intervalos de notas*

| Rango | Prom de Calificación | Porcentaje |
|---|---|---|
| **[1, 2)** | 2 | 12,50 % |
| **[2,3)** | 10 | 62,50 % |
| **[3,4)** | 3 | 18,75 % |
| **[4,5]** | 1 | 6,25 % |

Fuente: Autor

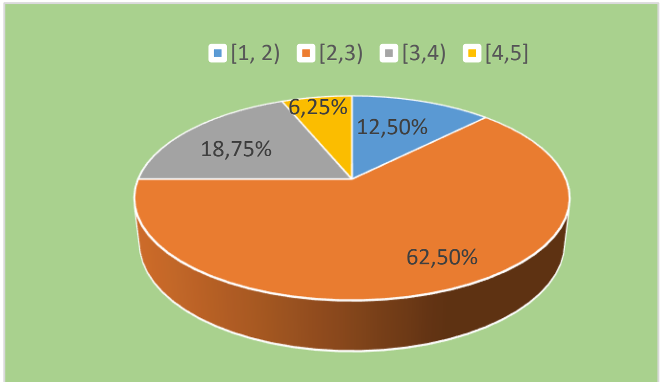



Gráfico 3. Porcentaje intervalo de notas

Se observa que el 75% de los estudiantes obtienen promedios por debajo de tres, el 25 % obtiene una nota por encima de tres y únicamente un grupo tiene una nota por encima de cuatro. Además, respecto a los resultados obtenidos por los estudiantes en cada una de las preguntas, se observa que únicamente en la pregunta tres, sacan una nota promedio de 3,1 y que las demás están por debajo de 3,0; tal como lo muestra el siguiente gráfico.

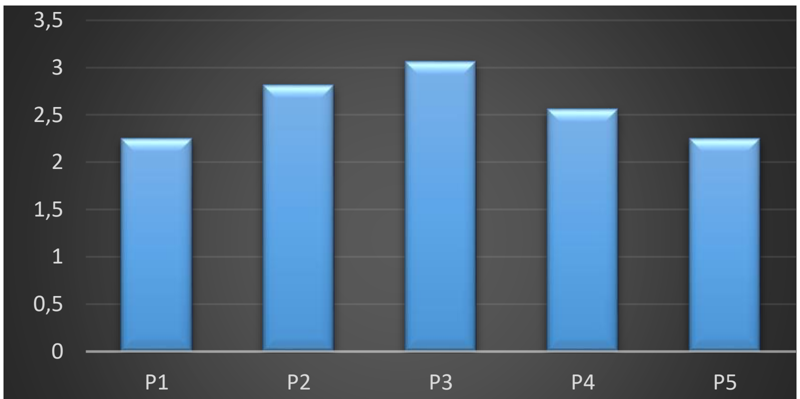



Gráfico 4. Promedio por pregunta

En la tabla comparativa entre la prueba inicial, llamada actividad de exploración de conocimientos y la prueba final realizada al terminar las secuencias didáctica, se detallan los porcentajes del número de respuestas correctas y el número de respuestas en proceso.

También es importante en este apartado del trabajo presentar los resultados de la prueba inicial aplicada utilizando la aplicación Geogebra, (Anexo 4), la cual constaba de tres preguntas que se debían resolver utilizando el software, una vez habían realizado la práctica de construcción de geoplanos. El procedimiento de la actividad demostró que los estudiantes no poseían las competencias básicas para resolver los ejercicios y muchos menos comprensión de las ecuaciones de tercer grado.

### 6.2.4 Análisis del experimento

El análisis e interpretación de resultados de la evaluación final o post test se presenta en la tabla 6, que está a continuación. (Anexo 5)

***Tabla 6****. Resultados evaluación post-test*

| | **PROMEDIO** | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Estudiante** | P 1 | P 2 | P 3 | P 4 | P 5 | P 6 | P 7 | P 8 | P 9 | P 10 | P 11 | Nota Promedio |
| **E1** | 4 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4,55 |
| **E2** | 4 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 4,55 |
| **E3** | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4,36 |
| **E4** | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4,55 |
| **E5** | 4 | 4 | 4 | 4 | 1 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4,00 |
| **E6** | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4,09 |
| **E7** | 4 | 4 | 4 | 1 | 5 | 4 | 4 | 4 | 5 | 2 | 3 | 3,64 |
| **E8** | 4 | 4 | 4 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | 3 | 3,27 |
| **E9** | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 4 | 5 | 2 | 3 | 3,09 |
| **E10** | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 2,73 |
| **E11** | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4,27 |
| **E12** | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 4 | 3,91 |
| **E13** | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2,55 |
| **E14** | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2,82 |
| **E15** | 4 | 4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2,45 |
| **E16** | 5 | 5 | 5 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 2 | 4,00 |
| **E17** | 1 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2,64 |
| **E18** | 4 | 4 | 1 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 5 | 3 | 4 | 3,55 |
| **E19** | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 | 4 | 5 | 5 | 2 | 3,55 |
| **E20** | 5 | 2 | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2,91 |
| **E21** | 4 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 4 | 4 | 3 | 5 | 3 | 3,36 |
| **E22** | 4 | 4 | 1 | 4 | 2 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 3 | 3,55 |
| **E23** | 4 | 4 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 5 | 4 | 3 | 3,18 |
| **E24** | 2 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 3 | 5 | 3,82 |
| **E25** | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4,36 |
| **E26** | 4 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 4 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2,82 |
| **E27** | 4 | 2 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 3,45 |
| **E28** | 4 | 2 | 1 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 4 | 2 | 1 | 2,73 |
| **E29** | 4 | 4 | 1 | 4 | 3 | 4 | 4 | 2 | 3 | 2 | 4 | 3,18 |
| **E30** | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 3 | 3,64 |
| **E31** | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | 3,73 |
| **Pro P** | 3,81 | 3,81 | 2,81 | 3,23 | 2,97 | 3,74 | 3,77 | 3,90 | 4,00 | 3,45 | 3,29 | 3,52 |

Fuente: Autor

La tabla 6 nos muestra el resumen de los resultados de la evaluación final realizada a los estudiantes del grado 10 B, en la que se calculan los promedios por pregunta representando como

**Pro P** al final de la tabla y el promedio de cada estudiante de acuerdo al código con el que fue caracterizado cada uno (E1, E2,…, E31).

De la información anterior y con base en los siguientes cuadros que resumen lo consignado en la tabla podemos concluir lo siguiente:

- Se elabora análisis tipo Likert, a la respuesta dada por cada estudiante, efectuando una ponderación que va desde muy bien; que corresponde a las respuestas donde se evidencian que los procedimientos efectuados por el estudiante son correctos y que tiene la respuesta correcta, a la cual se le asigna un valor de cinco (5), hasta las muy mal; que corresponde a las preguntas donde el alumno no intenta resolverlas, por lo tanto no hay ningún proceso ni respuesta por parte del estudiante, a la que se le asigna una nota de uno (1). Resultados que se exponen en la siguiente tabla:

***Tabla 7***. *Análisis Likert de la evaluación post-test*

| Escala | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| Valor | Muy mal | Mal | Regular | Bien | Muy bien |

Fuente: Autor

- Se elabora una tabla de frecuencias con el promedio de notas que obtuvo cada estudiante, proponiendo cuatro intervalos cuyo ancho es de una unidad, tal como lo muestra la siguiente tabla de datos y el diagrama circular que nos permite resumir los resultados.

**Tabla 8.** Resultados de las frecuencias del promedio de notas

| Rango | N° Est Promedio | Porcentaje |
|---|---|---|
| **[1,2)** | 0 | 0,00% |
| **[2,3)** | 8 | 25,81% |
| **[3,4)** | 14 | 45,16% |
| **[4,5]** | 9 | 29,03% |

Fuente: Autor

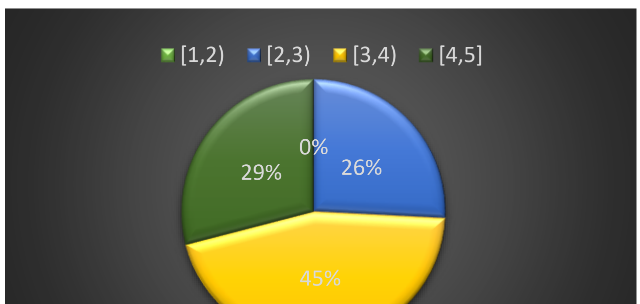


**Gráfico 5. Resultados Post-test**

De acuerdo con los resultados obtenidos en el gráfico, se observa que ningún estudiante saca notas por debajo de dos. Ocho estudiantes, que corresponden veinte seis por ciento (26%), sacan una nota entre dos y tres. El cuarenta y cinco por ciento, saca una nota entre tres y cuatro y el veinte nueve por ciento (29%), sacan una nota entre cuatro y cinco.

Los estudiantes que presentaron la evaluación fueron 31, de los cuales un 75% sacaron una buena nota en dicho ejercicio; lo cual da muestra de que la mayoría de los alumnos adquirieron dieron cuenta de los conocimientos básicos sobre los números laterales y quienes obtuvieron resultados bajos en la evaluación.

- Además, se efectúa el análisis de los resultados de los promedios obtenidos por los estudiantes en cada una de las preguntas de la evaluación final, los cuales se evidencian en los siguientes gráficos.

**Tabla 9.** Promedios por pregunta

| PREG | Prom P |
|---|---|
| **P1** | 3,81 |
| **P2** | 3,81 |
| **P3** | 2,81 |
| **P4** | 3,23 |
| **P5** | 2,97 |
| **P6** | 3,74 |
| **P7** | 3,77 |
| **P8** | 3,9 |
| **P9** | 4 |
| **P10** | 3,45 |
| **P11** | 3,29 |
| **Total** | 3,55 |

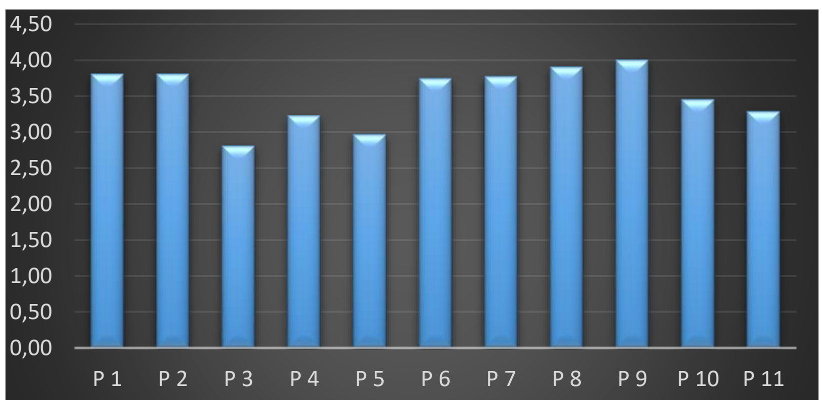


**Gráfico 6. Promedio por pregunta**

Fuente: Autor

De acuerdo con lo registrado en el gráfico en la mayoría de las preguntas formuladas a los estudiantes responden favorablemente; solamente dos de las preguntas tienen un promedio por debajo de tres, siendo el menor promedio 2,81 la cual corresponde a la tercera pregunta; seguido por 2,97 en la pregunta número cinco, y así sucesivamente hasta la pregunta número nueve que tiene el mejor promedio, el cual es de 4. Así el promedio por pregunta en el cuestionario de la evaluación final va desde 2,81 hasta 4 y el promedio entre ellas es de 3,55; lo cual da cuenta del buen desempeño de los estudiantes de grado 10 B en el dominio de los conocimientos básicos de la variable compleja.

***Tabla 10.*** *Comparativo actividad de exploración y prueba final.*

| **CONOCIMIENTOS** | **Prueba inicial** | | **Prueba final** | |
|---|---|---|---|---|
| | % de preguntas aprobadas | % de preguntas en proceso | % de aprobación | % de no aprobación |
| **1. Reconocer los números laterales como un par ordenado de puntos del plano y utilizar los geoplanos Circular y rectangular.** | 27% | 73% | 90% | 10% |
| **2. Reconocer el radio y el ángulo como elementos de un número lateral en su forma angular o polar.** | 0% | 100% | 48% | 52% |
| **3. Resolver operaciones de suma, resta multiplicación con puntos del plano.** | 0% | 100% | 76% | 24% |
| **4. Aplicar los números laterales en la forma angular en la resolución de problemas cotidianos.** | 18% | 72% | 48% | 52% |
| **5. Aplicar los números laterales en problemas de optimización.** | 0% | 100% | 55% | 45% |
| **6. Determinar los efectos de las transformaciones al operar sobre puntos de una región tales como traslaciones, dilataciones, rotaciones, etc.** | 25% | 75% | 72% | 28% |

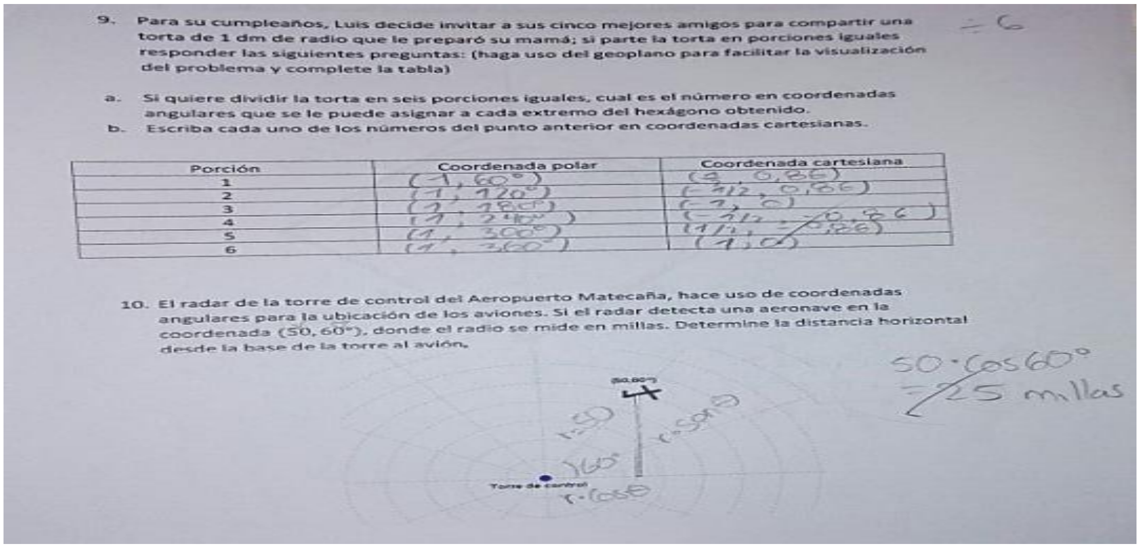
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **7. Aplicar las transformaciones en la resolución de problemas de la cotidianidad.** | 25% | 75% | 54% | 46% |
| **8. Realizar de manera geométrica particiones de la unidad.** | 0% | 100% | 68% | 32% |

Fuente: Investigación del Autor

### 6.2.5 Análisis de los resultados de la investigación

Del análisis realizado con base en la tabla anterior, se puede mencionar de forma general que los estudiantes de nuestra investigación tienen mejores capacidades en:

1. Reconocer y establecer la importancia que tiene los números laterales vistos como un par ordenado, para realizar operaciones entre ellos y utilizarlos en la solución situaciones cotidianas.
2. Identificar los números laterales en otras formas de presentación tal como la angular o polar y la exponencial.
3. Realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división con números laterales.
4. Aplicar los números laterales en la solución de problemas de su entorno, tales como problemas sencillos de optimización, de radares y de GPS.



9. Para su cumpleaños, Luis decide invitar a sus cinco mejores amigos para compartir una torta de 1 dm de radio que le preparó su mamá; si parte la torta en porciones iguales responder las siguientes preguntas: (haga uso del geoplano para facilitar la visualización del problema y complete la tabla)

a. Si quiere dividir la torta en seis porciones iguales, cual es el número en coordenadas angulares que se le puede asignar a cada extremo del hexágono obtenido.

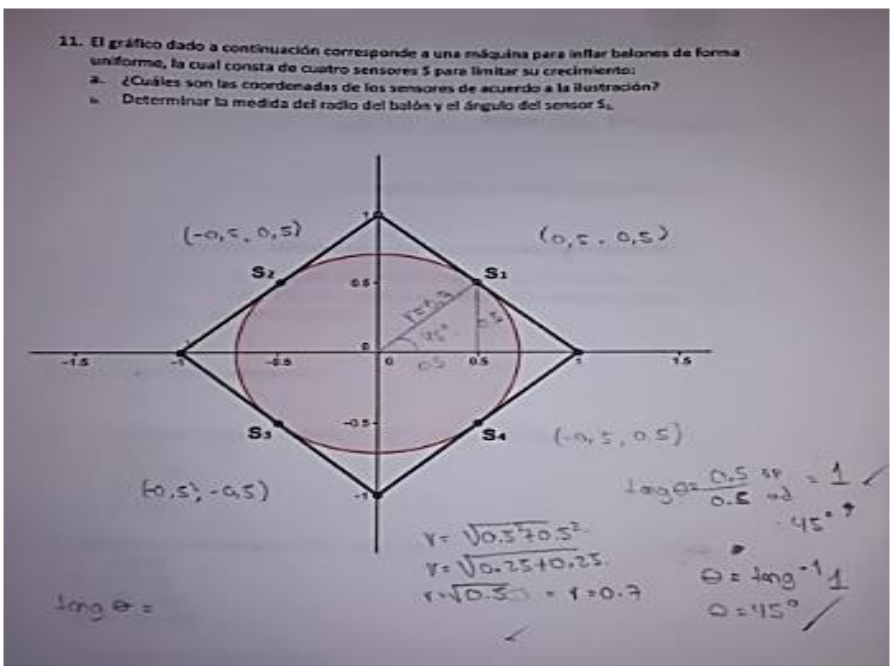
b. Escriba cada uno de los números del punto anterior en coordenadas cartesianas.

| Porción | Coordenada polar | Coordenada cartesiana |
|---|---|---|
| 1 | (1, 60°) | (1/2, 0,86) |
| 2 | (1, 120°) | (−1/2, 0,86) |
| 3 | (1, 180°) | (−1, 0) |
| 4 | (1, 240°) | (−1/2, −0,86) |
| 5 | (1, 300°) | (1/2, −0,86) |
| 6 | (1, 360°) | (1, 0) |

10. El radar de la torre de control del Aeropuerto Matecaña, hace uso de coordenadas angulares para la ubicación de los aviones. Si el radar detecta una aeronave en la coordenada (50, 60°), donde el radio se mide en millas. Determine la distancia horizontal desde la base de la torre al avión.



*Figura 18. Resultados Post-test*
Fuente: Autor investigación



11. El gráfico dado a continuación corresponde a una máquina para inflar balones de forma uniforme, la cual consta de cuatro sensores S para limitar su crecimiento:

a. ¿Cuáles son las coordenadas de los sensores de acuerdo a la ilustración?

b. Determinar la medida del radio del balón y el ángulo del sensor $S_1$.



*Figura 19. Resultados pregunta 11*
Fuente: Autor investigación

5. Realizar transformaciones entre puntos de un plano a otro.

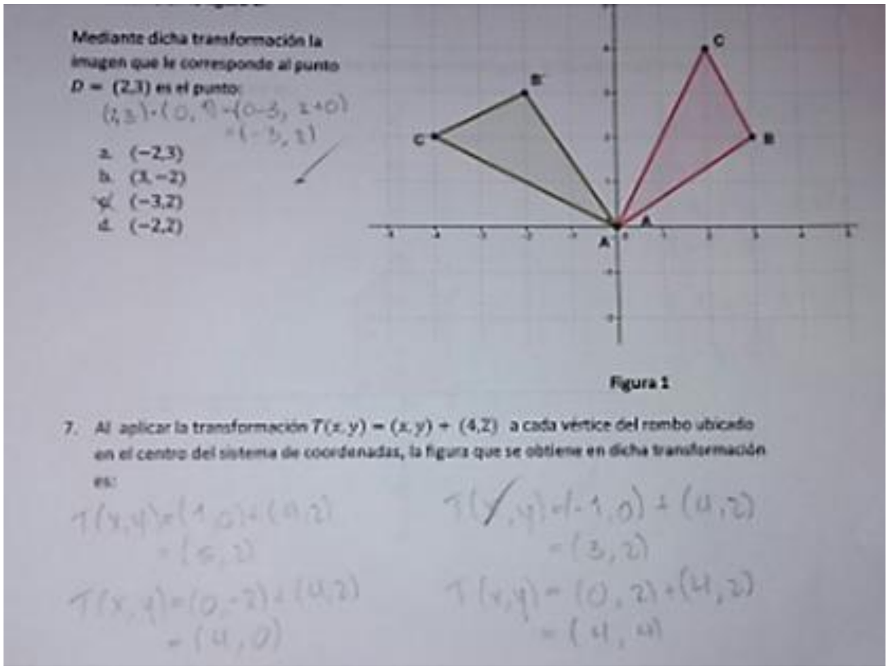



***Figura 20. Construcción de transformaciones***
Fuente: Autor investigación

6. Participar y disfrutar de juegos interactivos donde se aplique la teoría asociada a los números laterales.


***Figura 21. Interfaz juego Enigma***
Fuente: Autor

El Juego Enigma es el último paso en el proceso instructivo de este proyecto, ya que cumple un doble papel, por un lado sirve para el desarrollo de un aprendizaje significativo del concepto de números de laterales a partir de la ejecución de videos, audios y lectura de textos con la información necesaria sobre el tema. Por otro lado, la aplicación cumple un papel evaluador, pues ofrece diversos retos con los que el estudiante autoevalua el nivel de conocimiento alcanzado de los números laterales; haciendo así de la evaluación un acto formativo, ya que puede retornar cuando lo desee al espacio de información para aclarar dudas. De esta manera cuando el estudiante se siente totalmente competente accede a una herramienta en Google Drive, donde se publicó el instrumento que evalua de manera cerrada los conocimientos, en el Anexo 6 se encuentran imágenes de la aplicación y explicaciones del uso de la misma.

Para cerrar este capitulo, de acuerdo con lo observado y esperado en nuestro proyecto de investigación consideramos que es importante mencionar las dificultades en cuanto al manejo de las transformaciones para pasar de un plano a otro, la dificultad que tienen los estudiantes en la resolución de problemas nuevos, lo cual se evidenció en las situaciones a-didácticas y la facilidad y entusiasmo con que trabajan la parte algorítmica y de repetición de procesos como se puede ver la tabla, aunque, estas dificultades fueron disminuyendo conforme se realizaban las actividades individuales y grupales en las situaciones de formulación y validación. Las actividades aplicadas se diseñaron bajo el formato de secuencia didáctica, las cuales se encuentran al final de este proyecto en los Anexos 7 y 8.

# 7. Conclusiones

El desarrollo e implementación de la presente investigación nos permitió llegar a las siguientes conclusiones:

1- Mediante la información obtenida del análisis de los datos suministrados por parte de los estudiantes de grado undécimo y de grado décimo de la Institución Educativa Empresarial y de la encuesta que se les aplicó a los docentes de matemáticas del municipio de Dosquebradas, se logró evidenciar la importancia de la propuesta como respuesta a las dificultades presentadas por los estudiantes en el aprendizaje de la variable compleja y a la poca trascendencia que le dan algunos docentes a la variable compleja en el bachillerato, quedando muchas veces por fuera del currículo escolar.

2- Entre las problemáticas detectadas durante el diagnóstico inicial realizado a estudiantes de los grados décimo y undécimo para el aprendizaje de los números laterales, están las bases insuficientes en el reconocimiento del conjunto de los números complejos, sus operaciones y conceptos asociados como ángulos, radios y aplicaciones en problemas de la vida cotidiana.

3- Se desarrolló una propuesta didáctica, la cual permitió que los estudiantes ampliaran su dominio y comprensión del concepto de número, y además fortalecieron algunos conceptos geométricos, tales como rotación, traslación, semejanza y dilatación; a la vez que reforzaban los conocimientos de trigonometría impartidos en el grado décimo.

4- Se utilizó el Geoplano y el software Geogebra, los cuales hicieron posible la comprensión de los números laterales y de los tópicos: función de variable compleja, cuadrática, inversa, a partir del concepto de transformación.

5- Algunos elementos tecnológicos como las tabletas y los computadores facilitaron el desarrollo e implementación de la propuesta y contribuyeron en el aprendizaje alcanzado por los estudiantes de grado 10 B, del Colegio Empresarial Dosquebradas.

6- Se construyó un juego didáctico "Enigma", el cual sirvió como elemento motivador y evaluativo de la propuesta pedagógica, ya que su diseño en forma de retos promueve el aprendizaje por descubrimiento, involucrando los conocimientos sobre los números laterales y la función de variable compleja con algunos de sus tópicos.

## 7.1 Recomendaciones

Una vez implimentada la propuesta didáctica, se deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones para futuras investigaciones:

1. El estudio de los números complejos, desde el punto de vista geométrico puede ser trabajado y asimilado por estudiantes de todos los niveles del bachillerato a través de instrumentos didácticos; conduciéndolos a la comprensión de múltiples fenómenos de la naturaleza que difícilmente entenderían con los números reales, uno de estos sería trabajar la construcción de los fractales a través de la variable compleja.
2. En la enseñanza y aprendizaje es importante el uso de las TICs, como herramientas motivadoras para el aprendizaje del estudiante, por la escalabilidad de los conceptos, el uso de plataformas que emulan la realidad y la evaluación de los contenidos de una manera formativa.
3. Se hace necesario el trabajo investigativo sobre los números complejos en la escuela, puesto que son una herramienta que facilita la asimilación, no solamente

del concepto de función, y de otros tales como: límite, derivada, integral, sucesiones y series, y muchas otras herramientas de la matemática moderna.

4. Es necesario el fortalecimiento de los grupos de investigación docente en temas relacionados con la variable compleja para ser implementados en la escuela y de esa forma contribuir a elevar los niveles de desempeño de los estudiantes, así como las competencias de futuros profesionales.

## 8. Referencias Bibliográficas


Apóstol, Tom (1993). *Análisis Matemático.* Editorial Reverte. Consultado en línea de GoogleBooks.

Arredondo, Claudia (2016). *El sentido del número complejo desde sus raíces imaginarias.* UTP, Pereira.

Arrieche, Mario (2007). *¿Qué se investiga en educación matemática?: perspectiva de un investigador en desarrollo*. Paradigma v.28 n.2 Maracay dic. 2007, Venezuela.

Artigue, Michele, et al. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá.

Aurentz, Jared (2017, Septiembre, 22). Polinomios para construir edificios seguros. *El País.* Recuperado de: https://elpais.com/elpais/2017/09/22/ciencia/1506069453_894253.html

Bañol, Clara. y Cardona, Jairo. (2013) *Aplicaciones de la variable compleja en la física*. Tesis de grado, Universidad Tecnológica de Pereira.

Brousseau, Guy (1998). *Teoría de las situaciones didácticas*. Grenoble(1998). (2009). Educación y didáctica de las matemáticas, en educación matemática. México.

Cáceres, Luis y Barreto, César (2011). *El Geoplano como herramienta didáctica para la enseñanza de la Geometría.* Universidad de Puerto Rico. En red: http://afamac.uprm.edu/Geoplano.pdf

Calderón, Dora y León, Olga (2006). *La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Campeón Becerra, Milton (2016). *Aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación en contexto, mediante una ingeniería didáctica.* Universidad Tecnológica de Pereira.

Canal Martínez, Iván (2011). *La enseñanza de los números complejos en el bachillerato*. Universidad de Cantabria.

Chevallar, Yves (2005). *La transposición didáctica – del saber sabio al saber enseñado*. Editorial Aique. Buenos Aires.

Du Satoy, Marcus (2012). *Los misterios de los números.* Editorial Acantilado, Barcelona.

Echevarría, Hugo (2017). *Clasificación de los diseños mixtos en las Ciencias Sociales y aplicación al análisis de tres informes de investigación.* Revista Latinoamericana de Investigación Social, No. 12, Año 6

García, Juan Antonio (1991). *Matemáticas en secundaria: La didáctica de las matemáticas,* *una visión general*. Red Telemática Educativa Europea. En línea: http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/rtee/didmat.htm

Godino, Juan (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Madrid: MEC.

Godino, Juan; et al (2013). *La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño.* Universidad de Granada.

González, J.R, Mesa, F y Martínez, A. (2007). Introducción a las funciones de variable compleja. Universidad Tecnológica de Pereira.

González, Rodrigo; Mesa, F y Martínez, Alejandro. (2009) *Tópicos de análisis complejo*. Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de Ciencias Básicas.

Hernández Alemán, Ma Eugenia (2006). *El concepto de número*. Universidad Pedagógica Nacional del estado de Michoacán, México.

Hernández, Genaro (2007). *Introducción a la didáctica*. Universidad Santander, España.

Kline, Morris (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, II.* Editorial Alianza, Madrid.

Malavé, Néstor (2007). *Escala tipo Likert.* Universidad Politécnica Experimental de Paria, Venezuela.

Mallart, Joan (2000). *Didáctica, concepto.* Universidad de Barcelona, España.

Mata, Salvador y Rivilla, Francisco (2009). Colección Didáctica – Didáctica General. Segunda Edición, Madrid.

Medina, Antonio y Salvador, Francisco (2009). *Didáctica General*. Pearson Educación, Madrid.

MEN (1999). *Lineamientos curriculares: Nuevas tecnologías y currículo de Matemática*.
(2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Colombia.
(2015). *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas*.

Morales, María; et al (2007). Nuevas *Matemáticas 9*. Editorial Santillana, Bogotá, Colombia.

Murray, R. Spiegel (1991). *Variable Compleja*. México: McGraw-Hill.

Nahin, Paul J (2008). *Esto no es real, la historia de i.* Traducción de Juan Pablo Pinasco 2008. México.

Ossa, James ().

Pereira, Zulay (2010). Los diseños de método mixto en la investigación en educación: Una experiencia concreta. Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.

Pierpont, James (1914). *Functions of a complex variable*. Dover, New York.

Rivero, Francisco (2001). *Introducción a los números complejos*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Mérida, Venezuela.

Suazo, Mario (2015). *El uso de Scilab como una estrategia alternativa a la enseñanza de la variable compleja: Un estudio realizado en UNAH-VS.* Universidad Pedagógica Nacional, San Pedro Sula, Venezuela.

Villegas, Mauricio (1990). *Matemáticas 2000 No. 9.* Editorial Voluntad, Colombia.

# Anexos

**Anexo 1**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**

**Maestría en enseñanza de la matemática**

## ENCUESTA A DOCENTES

Compañero docente, la siguiente encuesta tiene por objeto conocer la forma como usted aborda desde su práctica de aula el tema de la variable compleja o los números complejos a nivel de la básica o la media vocacional.

1. ¿Cuáles son los problemas más evidentes que se le presentan a la hora de enseñar los números complejos?

2. ¿Qué propuesta pedagógica y didáctica ha empleado a la hora de resolver esos problemas?

3. ¿Por qué considera usted importante que el estudiante al terminar su bachillerato tenga unas nociones claras sobre los números complejos?

4. ¿En qué aspectos de la vida práctica considera usted aplicable el dominio de los números complejos?

5. ¿Realiza dentro de su práctica de aula una integración entre los conocimientos geométricos, algebraicos y trigonométricos, transversalizando así los números complejos?

Anexo 2

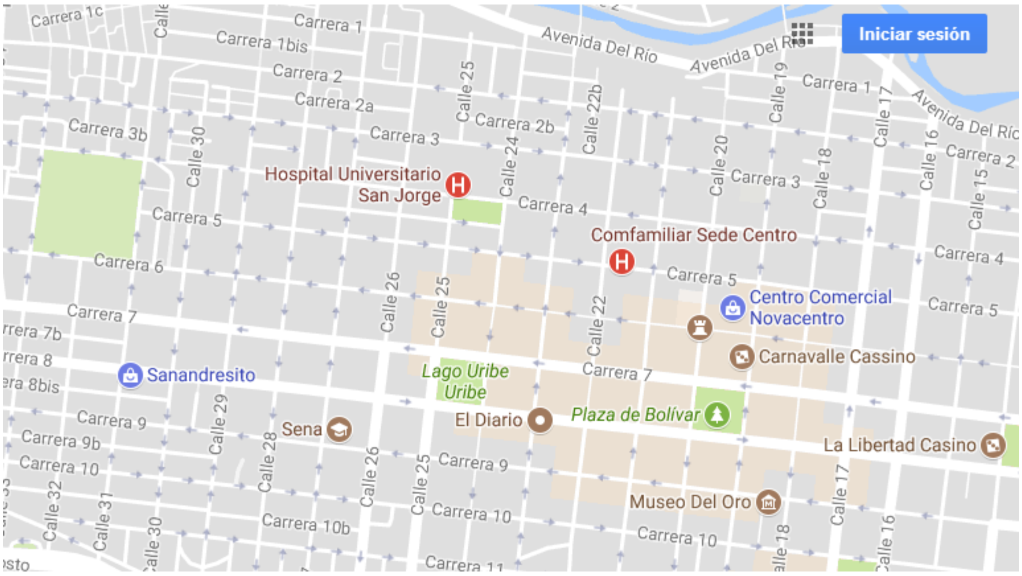
## UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

## Maestría en enseñanza de la matemática

INSTITUCION EDUCATIVA EMPRESARIAL DOSQUEBRADAS

## SITUACIÓN ADIDACTICA

## Pereira, mi ciudad capital.




Un mensajero que trabaja en la carrera séptima con calle 24 esquina, es decir su punto de referencia es una de las esquinas del Lago Uribe. Además él sabe que todas las cuadras son cuadradas y cuya una longitud es de 100 metros. De acuerdo con la información responda las siguientes preguntas:

1. Si la entrada al Hospital San Jorge, está en la veinticinco con cuarta, ¿cuál es la distancia que separa la entrada al hospital de la oficina del mensajero?

   ______________________________________________________________________

   ______________________________________________________________________

   ______________________________________________________________________

2. Si la entrada a la clínica Comfamiliar está en la veintidós con quinta, ¿Qué distancia separa la oficina del mensajero con la clínica?

   ______________________________________________________________________

   ______________________________________________________________________

   ______________________________________________________________________

3. ¿Cuál es la distancia que separa los dos centros asistenciales?

________________________________________________________________________
________________________________________________________________________
________________________________________________________________________

4. Por necesidades locativas la oficina del mensajero se trasladó al pie de la plaza de Bolívar, y la entrada coincide con la diecinueve con séptima, para él esto generó cierto disgusto pues considera que muchos lugares que frecuentaba estarán más retirados y que su trabajo será más agotador. ¿Cuántas cuadras debe recorrer para ir al hospital?
___________________________________________________________________________

5. ¿Cuál sería la distancia mínima que recorrería el mensajero para ir de la oficina al hospital si no existieran las edificaciones de por medio?
________________________________________________________________________
________________________________________________________________________
________________________________________________________________________

6. El mensajero piensa que por haber cambiado de oficina, también cambiaron las distancias entre los lugares que frecuenta y que por ello los dos hospitales están más retirados uno del otro. Está de acuerdo con él SI_____ NO_____ Por qué?____
________________________________________________________________________
________________________________________________________________________
________________________________________________________________________

**Anexo 3**

## UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

## Maestría en Enseñanza de la Matemática

**PRUEBA DIAGNOSTICA PARA ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO**

**Nombre: ________________________________ Grado: ____ Fecha:______**

Responda las siguientes preguntas de manera clara y objetiva.

1. ¿Cuáles son los conjuntos numéricos que usted reconoce?

| |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |
| |

2. ¿Qué clase de número es para usted la expresión $3 + 4\sqrt{-1}$ ?

   ____________________________________________________________________________

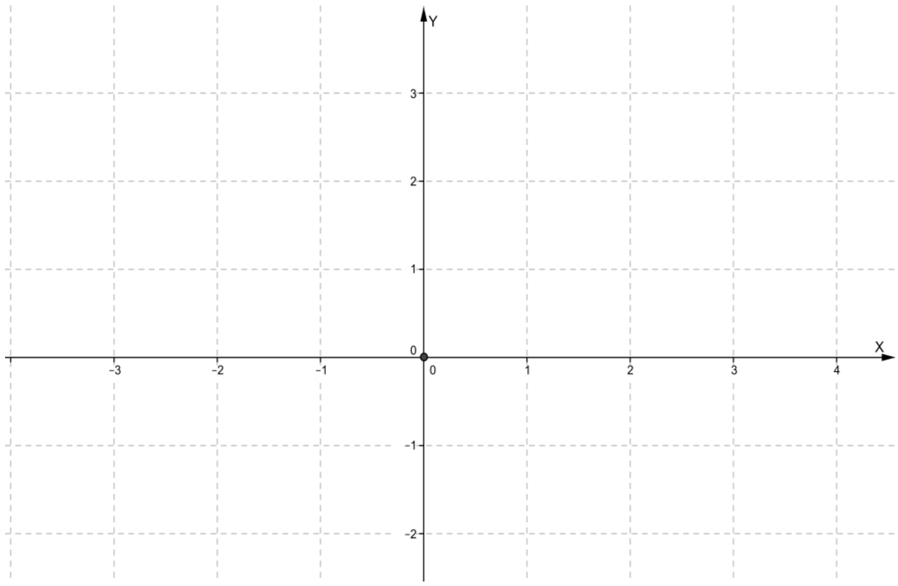
   ____________________________________________________________________________

3. El resultado de la expresión $(5 + 2i) + (3 - 6i)\ es$: ______________________________

4. Encuentre el resultado del siguiente producto: $\left(3 + 4\sqrt{-1}\right)\left(3 - 4\sqrt{-1}\right) =$____________

5. Determine la ubicación en el plano cartesiano de los siguientes puntos:

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| (-1,0) | (3,2) | (0,1) | (3,-2) | (-1,2) |



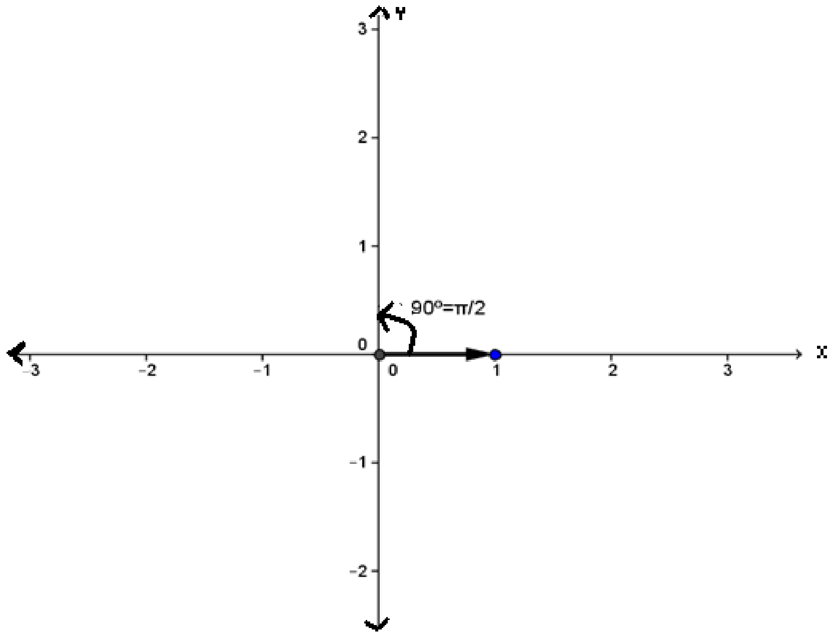

6. El conjunto solución de la ecuación $x^2 + 4 = 0$, es:

| | | |
|---|---|---|
| a) | | $2$ y $-2$ |
| b) | | $2i$ y $-2i$ |
| c) | | $i$ y $-i$ |
| d) | | No tiene solución |

7. Si en el plano cartesiano ubicamos el segmento (0,1), y en él se efectúan las rotaciones de 90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj, tal como lo muestra la figura.

¿Cuál sería la posición final del segmento si:

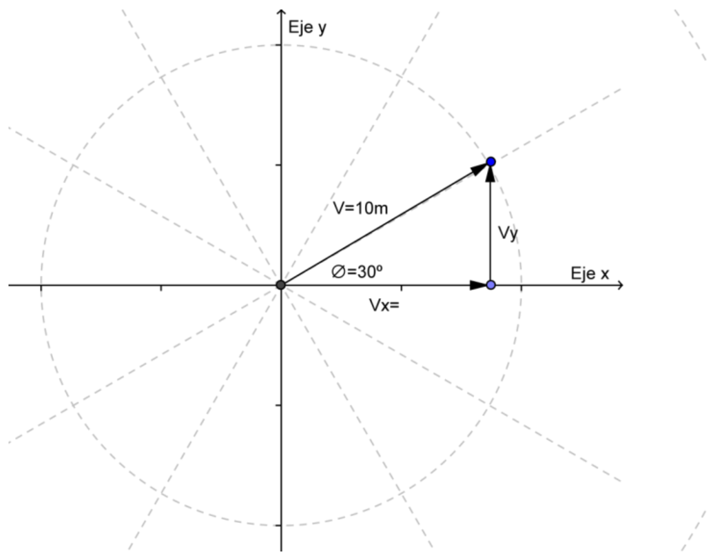
a. Se realiza la rotación desde la posición inicial una vez.______________
b. Se realiza la rotación desde la posición inicial dos veces.____________
c. Se realiza la rotación desde la posición inicial tres veces.____________
d. Se realiza la rotación desde la posición inicial cuatro veces.__________
e. Se realiza la rotación desde la posición inicial seis veces.____________
f. Se realiza la rotación desde la posición inicial nueve veces.__________
g. Puedes encontrar un patrón para definir lo que sucede con las rotaciones?____________________________________________________________
_____________________________________________________________________




8. Si en un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 10 cm y uno de los catetos mide 7 centímetros. ¿cuánto mide el otro cateto? (Elabore el gráfico con las medidas dadas).

9. Represente gráficamente el segmento orientado cuyo punto final es (2,5) y determine las medidas de sus componentes rectangulares, teniendo en cuenta que θ es el ángulo que forma el segmento con el semieje positivo de las $x$.

10. Si se tiene el segmento orientado de módulo o magnitud 10 y que forma un ángulo de $30^0$, con el semieje positivo de las $x$, cuales son las dimensiones de las componentes rectangulares del segmento. (ubíquelas en el plano cartesiano)



**Anexo 4**

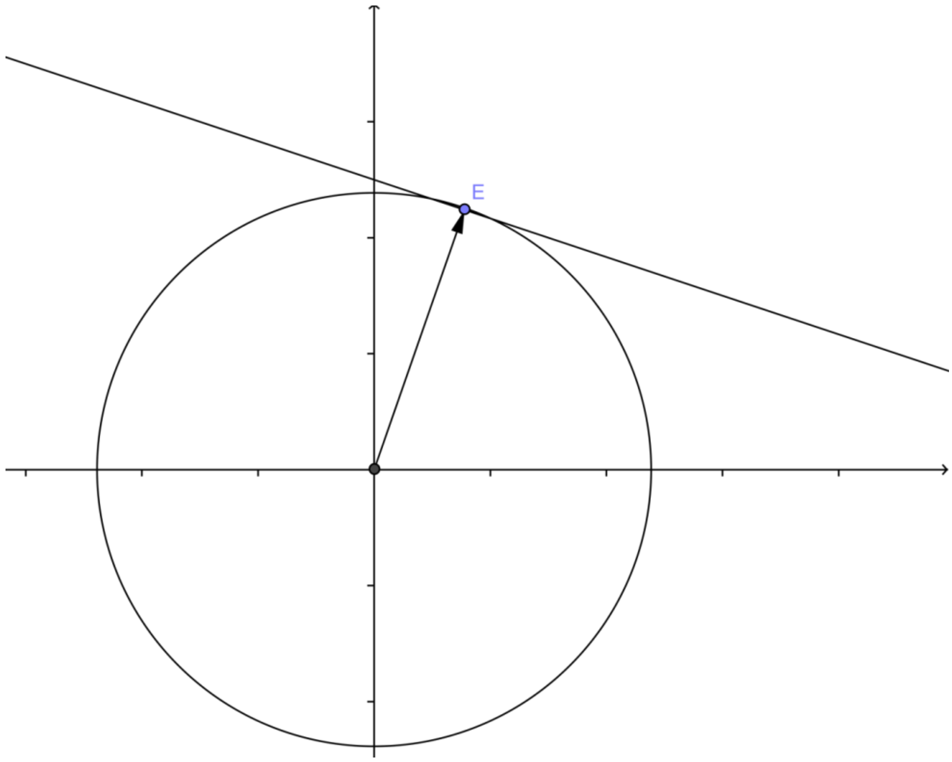
## UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

## Maestría en enseñanza de la matemática

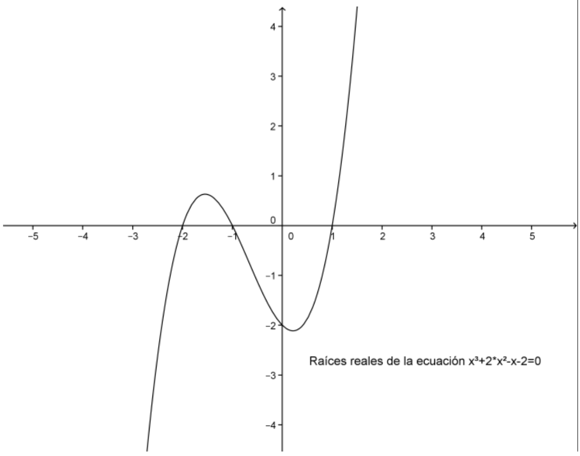
Situación Adidáctica.  Raíces o soluciones de una ecuación con Geogebra.

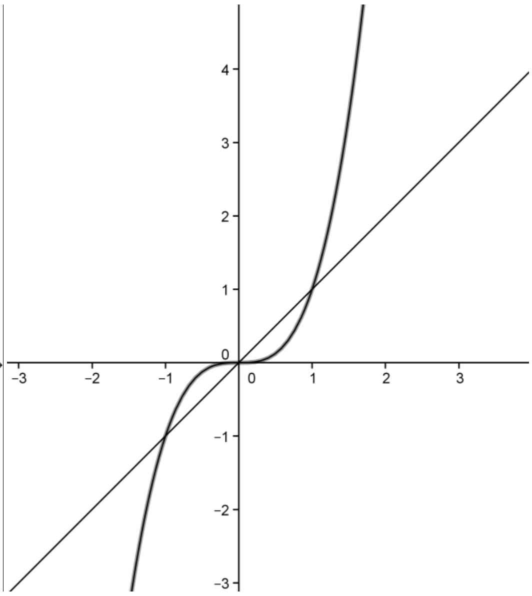
Situación problema:

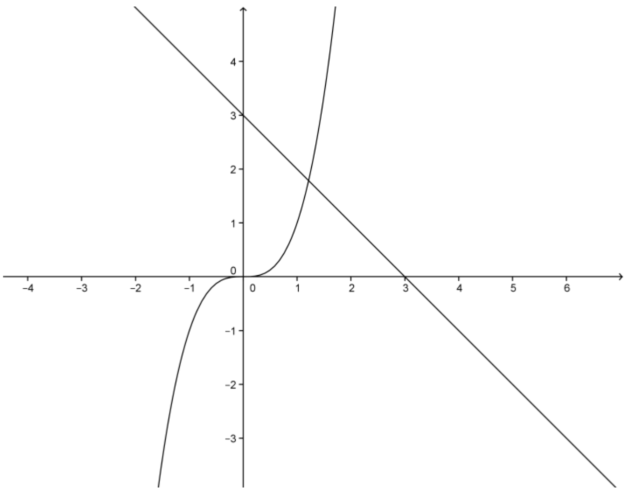
1. La recta cuya pendiente es $-1/3$ corta el eje vertical en el punto (0,5) y corresponde a una simplificación de una barra caliente. Si una circunferencia cuyo material es de látex (una especie de globo o bomba), comienza a crecer radialmente desde el origen hasta tocar la barra caliente, la cual hace que la bomba se estalle justo cuando toca el punto E, de acuerdo con la figura. ¿cuáles serían las coordenadas tanto cartesianas como angulares del punto de intersección del globo con la barra?

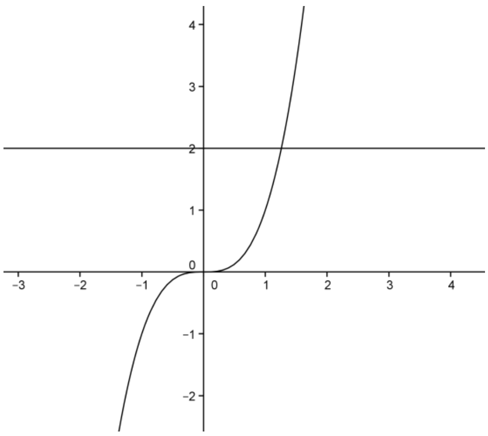



2. Al resolver una ecuación de la forma $x^3 = ax + b$, la cual, de acuerdo con el teorema **fundamental del algebra** tiene tres raíces o soluciones que corresponden a la intersección de la grafica con el eje de las abscisas (x) y en el caso de que no sean soluciones reales al menos una de ellas la podemos obtener interceptando la curva $y = f(x) = x^3$ con la gráfica de la función lineal $y = f(x) = ax + b$ tal como lo muestran las figuras.







a. De acuerdo con lo anterior encuentre en forma gráfica, el punto de intersección de la ecuación $x^3 = 15x + 4$.
b. Verifique reemplazando en la ecuación si la solución es correcta.
c. El método para encontrar la solución anterior se debe a Cardano, el cual planteo una fórmula para llegar a la solución de las ecuaciones cúbicas de la forma ya mencionada y que condujo a soluciones fuera del dominio de los números reales, la cual se expresa así: $x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}$ Reemplace los valores a y b en la expresión anterior, compárela con la solución de los binomios

$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ y $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$. Y de acuerdo con los resultados determine donde deben existir las raíces de la ecuación $x^3 = 15x + 4.$

Haga uso del software Geogebra, para realizar la actividad.

**Anexo 5**

## UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

## Maestría en Enseñanza de la Matemática

## Institución Educativa Empresarial

**Prueba escrita estudiantes de grado décimo**

**Nombre: _______________________________ Grado: ____ Fecha:______**

Por favor responda las siguientes preguntas de manera clara y objetiva

Sean $a, b, c, d$, números reales, definimos sobre este conjunto las siguientes operaciones:

Suma $\langle + \rangle$ y multiplicación $\langle \cdot \rangle$, sobre los números laterales así: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, De acuerdo a lo anterior y a lo estudiado en la propuesta vista en clase, responda las siguientes preguntas.

Marque con una X la respuesta correcta.

1. La suma de los siguientes números $(-5,4) + (8,3)$ es el número
   a. $(3,7)$
   b. $(-3,-3)$
   c. $(3,1)$
   d. $(-2,12)$

2. El producto de los números $(2,4)$ $y$ $(5,3)$ es :
   a. $(22,26)$
   b. $(-2, 26)$
   c. $(22, -26)$
   d. $(-22, -26)$

3. El cuadrado del número $(4,2)$ es :
   a. $(4,8)$

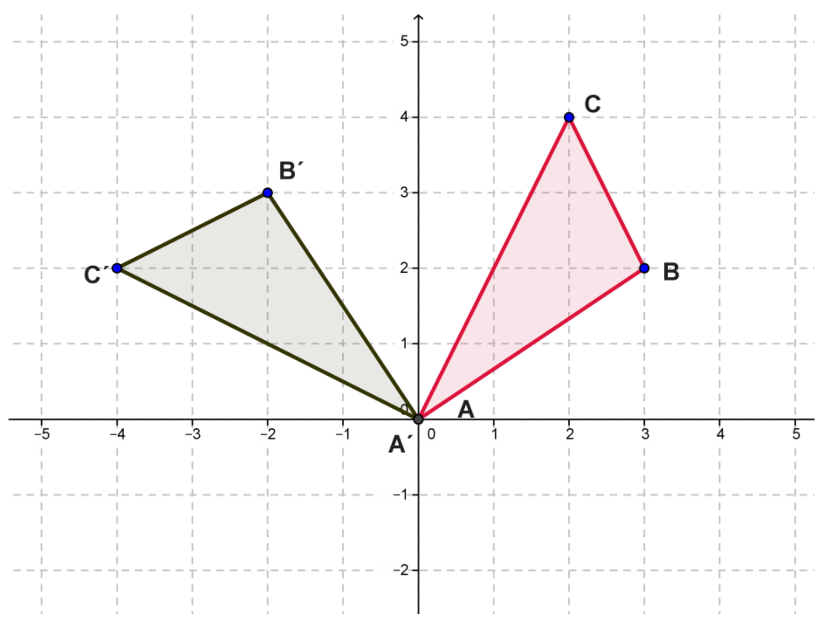
b. $(16{,}8)$
c. $(12{,}16)$
d. $(8{,}6)$

4. La ecuación $(x, y) + (-3{,}4) = (1, -5)$, tiene como solución el número lateral:
   a. (4,9)
   b. (-4,-1)
   c. (4,-9)
   d. (-2,-1)

5. Asocie mediante un segmento de recta el efecto que hace cada transformación al aplicársele a los puntos de una región determinada.

| Operador | Transformación |
|---|---|
| Suma | Traslada el eje de coordenadas |
| Multiplicación por (0,a) | dilata el radio y rota el ángulo |
| Multiplicación por (a,0) | Dilata el radio y rota $90^0$ |
| Multiplicación por (a,b) | Dilata el radio |
| Multiplicación por (-1,0) | Rota $180^0$ |

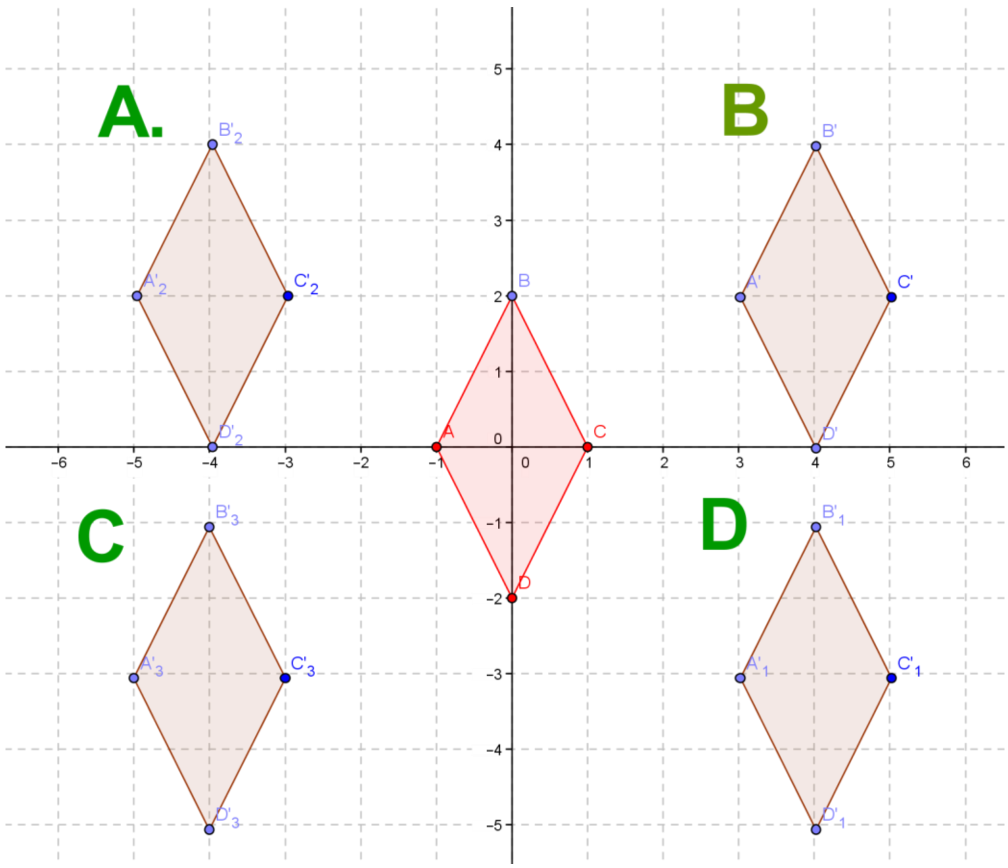
6. Cada punto de la región limitada por el triangulo ABC es rotado $90^0$ y transformado en el triángulo A´B´C´. tal como se observa en la figura.



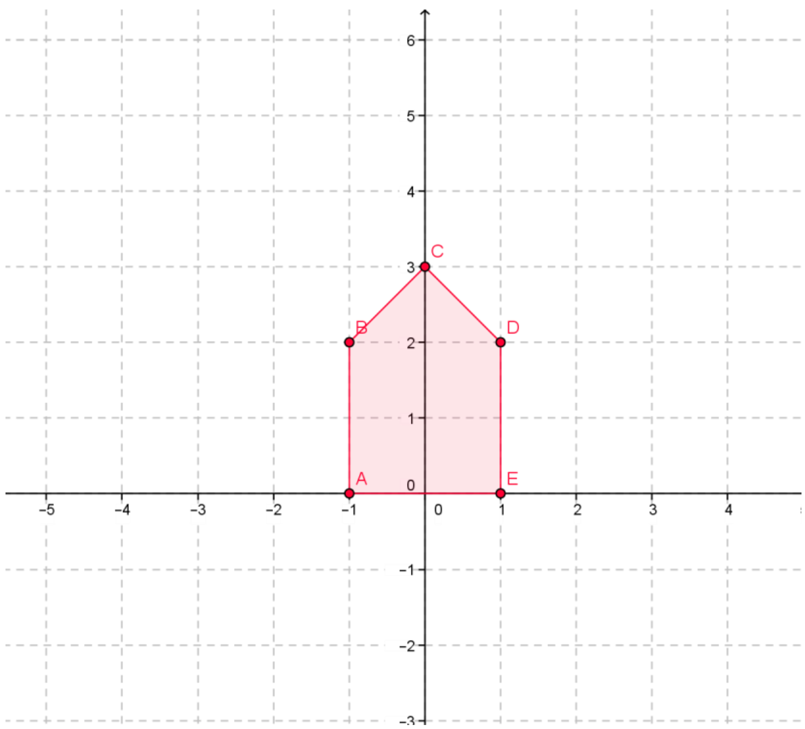

Mediante dicha transformación la imagen que le corresponde al punto $D = (2{,}3)$ es el punto:

a. $(-2{,}3)$
b. $(3, -2)$
c. $(-3{,}2)$
d. $(-2{,}2)$

7. Al aplicar la transformación $T(x, y) = (x, y) + (4,2)$ a cada vértice del rombo ubicado en el centro del sistema de coordenadas, la figura que se obtiene en dicha transformación es:




8. Al sumar $(-2,4)$ a cada uno de los vértices del pentágono, la transformación que experimenta la figura es:




a. Una rotación de $90^0$ y se duplican las coordenadas de cada punto.
b. Una traslación dos unidades a la izquierda y cuatro unidades hacia arriba.
c. Una rotación de $90^0$ y se cuadruplican las coordenadas de cada punto.
d. Una traslación dos unidades hacia la derecha y cuatro unidades hacia arriba.

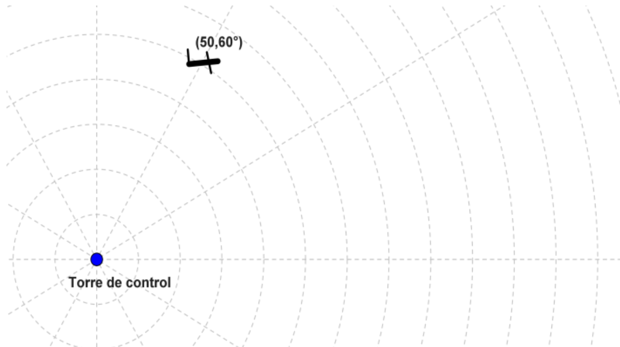
9. Para su cumpleaños, Luis decide invitar a sus cinco mejores amigos a compartir la torta de 1 dm de radio que le preparó su mamá; si parte la torta en porciones iguales. (Haga uso del geoplano para facilitar la visualización del problema y complete la tabla)

a. Si quiere dividir la torta en seis porciones iguales, cual es el número en coordenadas polares que se le puede asignar a cada extremo del polígono que se forma al hacer la repartición.
b. Escriba cada uno de los números del punto anterior en coordenadas cartesianas.

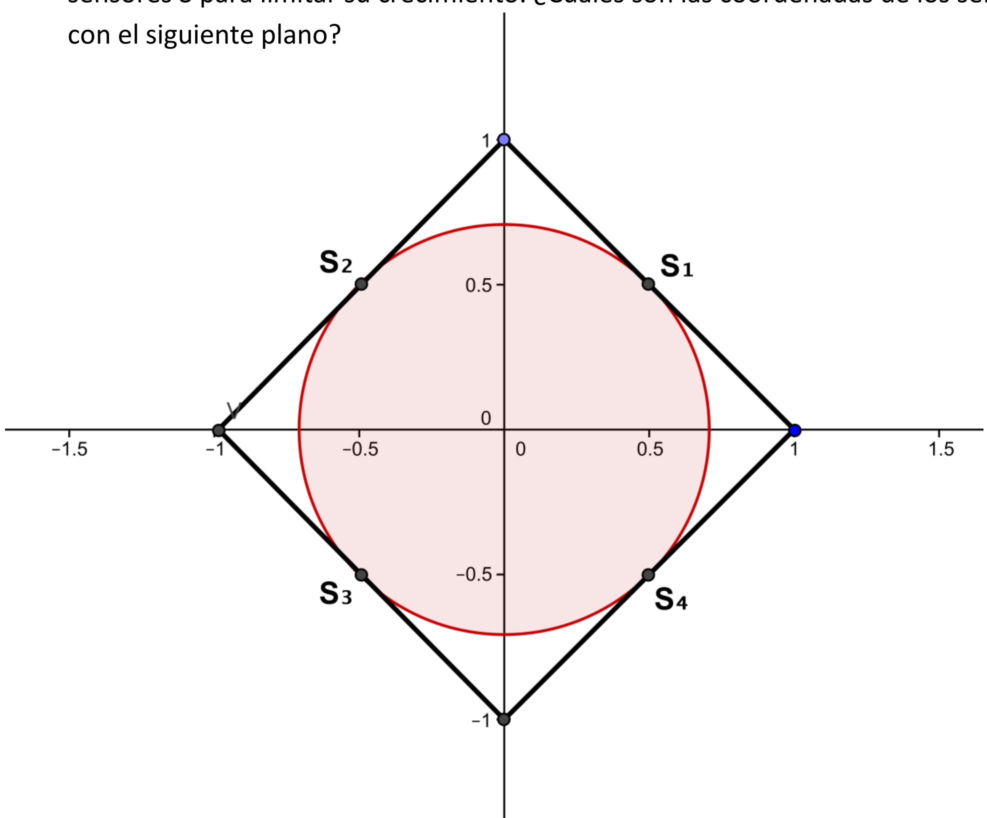
| Porción | Coordenada polar | Coordenada cartesiana |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | | |
| 6 | | |

10. El radar de la torre de control del Aeropuerto Matecaña, hace uso de coordenadas polares para la ubicación de los aviones. Si el radar detecta una aeronave en la coordenada $(50, 60°)$, donde el radio se mide en millas. Determine la distancia horizontal desde la base de la torre al avión.




11. El gráfico corresponde a una máquina para inflar balones en forma uniforme, que tiene cuatro sensores S para limitar su crecimiento. ¿Cuáles son las coordenadas de los sensores de acuerdo con el siguiente plano?




Determinar la medida del radio del balón y las coordenadas polares y rectangulares del sensor $S_1$.

**Anexo 6.**

## Juego Enigma

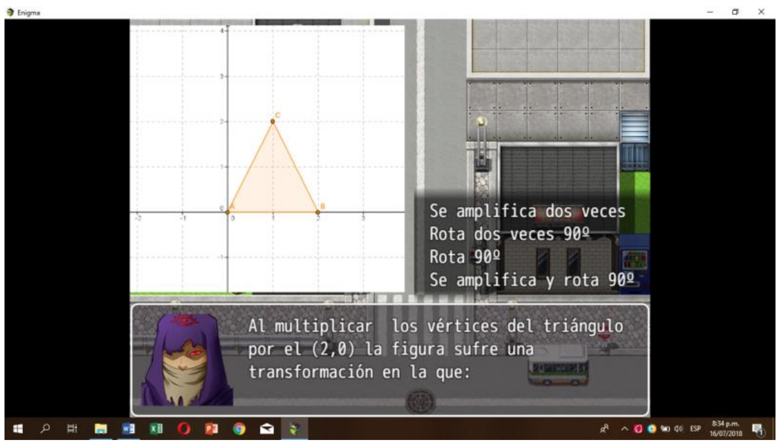
### Instrucciones de instalación

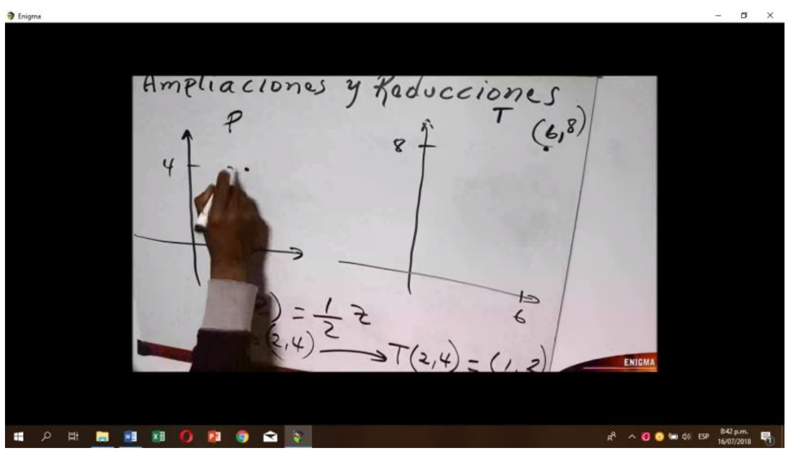
Ejecute el archivo “Game” que se encuentra al interior de la carpeta “Enigma”, una vez cargado aparecerá un pantallazo como el que se observa en la imagen:

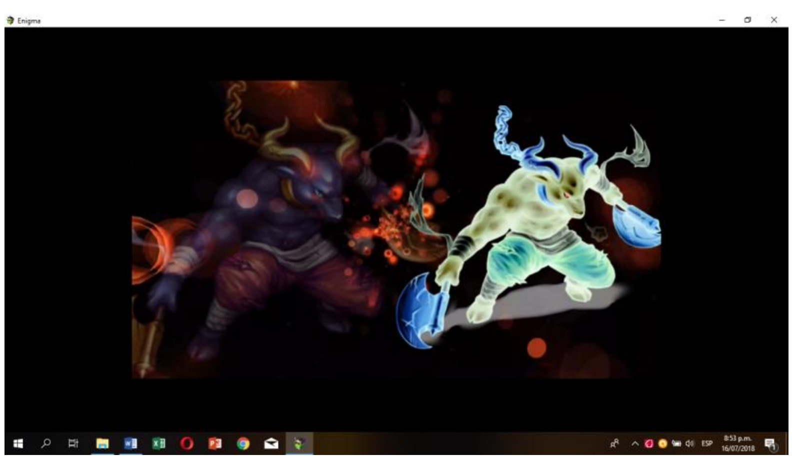

Ahora seleccione *Nueva partida* si usa por primera vez la aplicación o si desea comenzar una nueva experiencia en la misma. Si desea continuar la última partida jugada, el sistema lo permitirá haciendo clic en *Continuar*. Cuando el usuario hace clic en *Opciones* aparece un menú que le permite configurar recordar los comandos, modificar el volumen y usar la función de *Siempre Embestida*, que significa que el usuario siempre enfrentará al Orco.

Una vez inicia la partida, en pantalla el usuario verá el personaje principal del juego, el cual puede evadir la pelea y esto lo lleva a otros niveles del juego donde encuentra preguntas, como la que se observa en la siguiente imagen.

El objetivo de *Jack (*personaje principal del juego*)* es rescatar a su esposa y para ello debe superar los diversos obstáculos que se encuentra en cada una de las cinco interfaces del juego, las que van teniendo un aumento progresivo de la dificultad de soluciones de preguntas y problemas sobre los números laterales. Además *Jack* durante el recorrido encontrará textos, sonidos, gráficos que le permiten resolver los interrogantes que encuentra en cada interfaz del juego.




Enigma
Con lápiz y papel, resuelve el siguiente
ejercicio y obtendrás EL AGUA MÁGICA para
pasar al siguiente nivel...

**Anexo 7**

## Secuencia Didáctica para la Enseñanza de los Números Laterales. Parte I

En este capítulo del trabajo se presentan los constructos didácticos proyectados desde los objetivos de la investigación para potencializar el aprendizaje de algunos tópicos de la Variable Compleja en la media vocacional en la Institución Educativa Empresarial del municipio de Dosquebradas.

**Asignatura:** Trigonometría

**Unidad Temática: La trigonometría y su relación con el álgebra, la geometría y los conjuntos numéricos**

**Tema:** Los números Laterales

**Contenidos:** El plano cartesiano, el número lateral como un punto del plano y en forma angular.

**Duración de la secuencia:** 4 Horas.

**Población**: 36 estudiantes de la Institución Educativa Empresarial Dosquebradas.

**Objetivos:**

- Reconocer el conjunto de los números laterales en sus diversas presentaciones.
- Comprender la importancia de los números laterales en el entorno.
- Escribir el número lateral en cualquiera de sus presentaciones.

> "La herramienta más potente que hemos creado para navegar por el mundo complejo y arriesgado en el que vivimos son las matemáticas". Du Satoy (2012, ix.)

**Introducción**

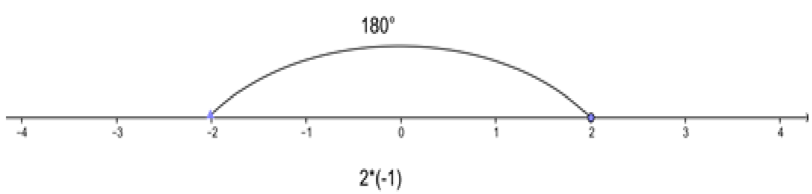
Los números son una construcción cultural y por lo tanto obedecen a una necesidad, a un contexto que le permite dar sentido. Por ejemplo nuestros antepasados inicialmente solo necesitaron del número natural, posteriormente necesito de las fracciones (como parte de la unidad), luego de las cantidades negativas para resolver ecuaciones donde el minuendo fuese menor que el sustraendo o para representar algunas cantidades al realizar las cuentas, y sobre la base de los anteriores conjuntos, se llegó a los números Racionales ($\mathbb{Q}$). Posteriormente aparecen los números que surgen de relacionar dos magnitudes, tales como el número pi que resulta de dividir la longitud de la circunferencia entre su diámetro o las raíces inexactas tal como raíz de dos y que conocemos como números Irracionales ($\mathbb{Q}'$). La unión de estos dos grandes conjuntos nos permite obtener los números reales, que hemos venido utilizando desde grados anteriores.

Las ecuaciones de la forma $x^2 + a = 0, donde\ a\ es\ un\ número\ real\ positivo,$ no tienen solución en los números reales, al igual que las raíces pares de cantidades negativas y en general las raíces n-ésimas de la unidad, cuando n es mayor que dos; entre otras, son situaciones que se salen del dominio de los reales y que por ende requieren del dominio y la comprensión de un nuevo conjunto numérico, que llamaremos **números laterales(NL),** tal como los definió Carl Gauss, en su época. El dominio y comprensión de este conjunto numérico, nos permite interpretar situaciones de nuestro tiempo en el campo de la cartografía, la ingeniería, la astronomía, la navegabilidad, la matemática utilizada en la construcción de los hermosos fractales y en general de la matemática moderna.

A diferencia de los reales que se representan gráficamente a través de una línea recta (lineales o unidimensionales), **los números laterales**, requieren para su representación de un plano, es decir tienen dos dimensiones. Además, el manejo y la comprensión básica de este conjunto permitirá relacionar conocimientos de la geometría, el álgebra y la trigonometría. Bienvenidos a esta enriquecedora experiencia, que conducirá al conocimiento de un nuevo conjunto numérico de gran utilidad en nuestros tiempos.

### *Recta de los números Reales*

La recta de los números reales se construye ubicando en una recta el cero u rigen, definiendo la unidad y repitiéndola de manera infinita a la derecha, para obtener los números naturales, luego se ubican las fracciones; que resultan de dividir la unidad en partes iguales, los demás racionales y entre ellos los irracionales, completando así la parte positiva de la misma; éstos números son **directos**. Los negativos o **indirectos,** se obtienen de multiplicar por -1 cada uno de los directos y se ubican a la misma distancia al otro lado del cero, es decir, mediante una rotación de $180^0$, respecto al origen. Tal como lo muestra la figura.

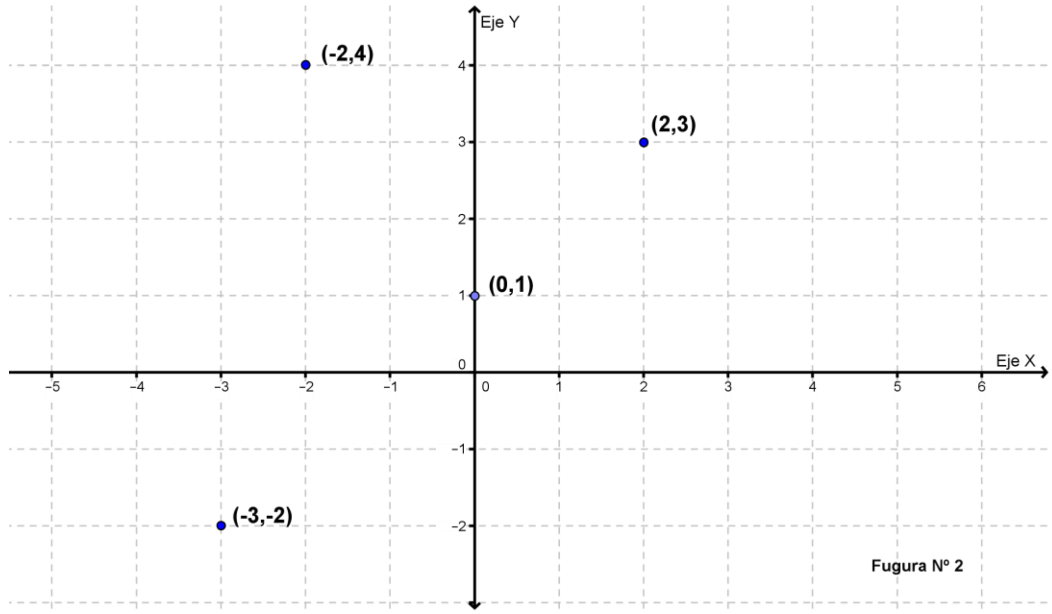



***El plano cartesiano bidimensional o R^2***
Fuente: Elaboración propia

***René Descartes(1596-1650)***
Fuente: Wikipedia

Recordemos que esta herramienta fundamental en la matemática y específicamente en la geometría y el álgebra, se le debe al francés René Descartes. Para su construcción ubicamos dos rectas reales en forma perpendicular y cada punto del plano cartesiano $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es una pareja ordenada $(x, y)$, donde $x$ corresponde a las abscisas e $y$ a las ordenadas. De manera práctica podemos representar puntos del plano cartesiano en el geoplano rectangular o en el circular.

Por ejemplo, las parejas (2,3), (-2,4), (0,1), (-3,-2), las cuales se pueden ubicar en el plano cartesiano tal como lo muestra la figura.



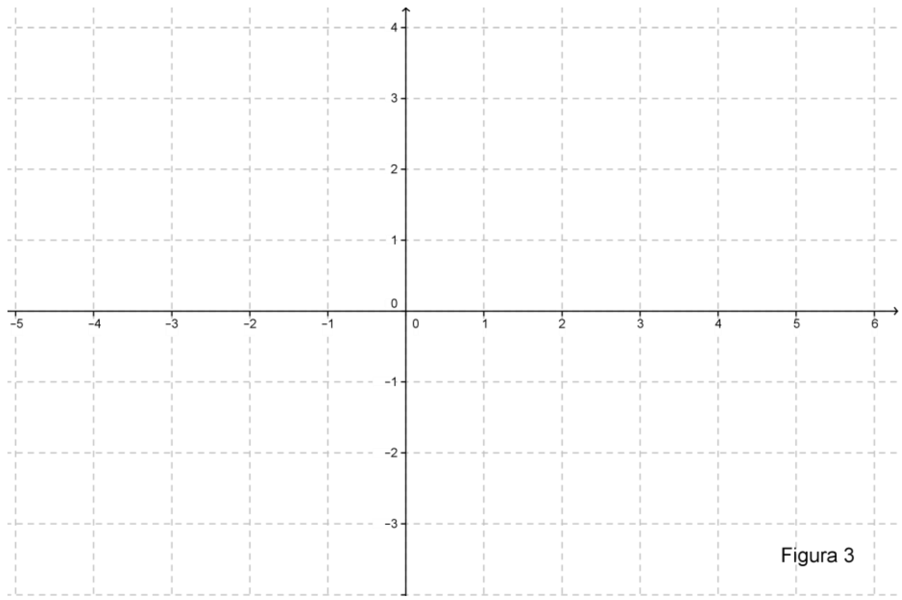

**Gráfica de números laterales en el plano**

Fuente: Editado de Geogebra

## Actividad Grupal N°1.

1. Ubica en el plano cartesiano los puntos: $A = (2,0)$; $B = (2,-3)$; $C = (-3,0)$;

$D = (-4,2)$; $E = (-1,-2)$.




***Plano de los números laterales***
Fuente: Editado de Geogebra

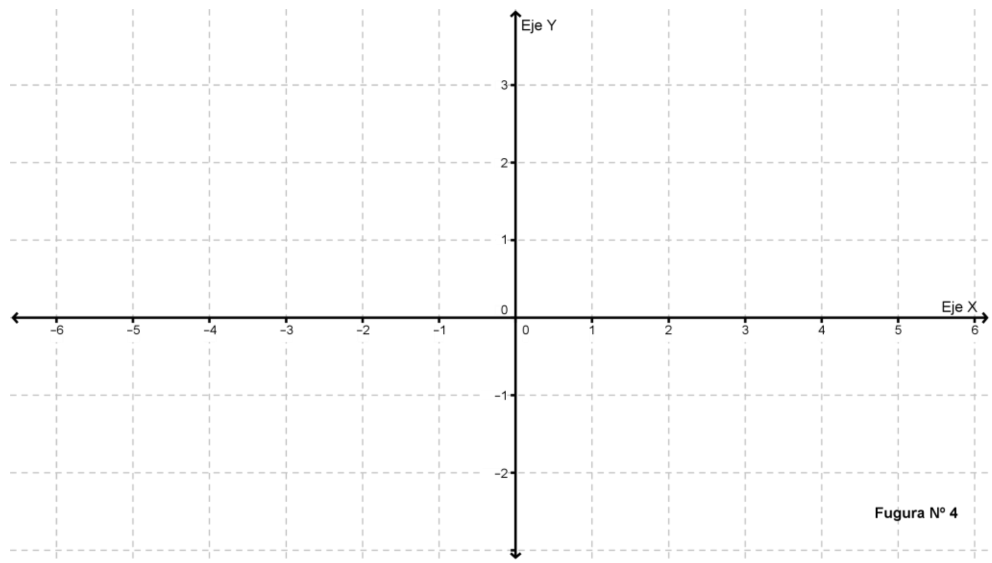
2. A cuántas unidades respecto al origen del plano se encuentran los siguientes puntos:
    a. El punto (3,0)
    b. El punto (-3,0)
    c. El punto (0,4)
    d. El punto (3,3)
    e. El punto (4,3)
    f. En los casos a, b y c se pudo establecer de manera directa a qué distancia respecto al origen se encontraban los puntos, sucede algo semejante con los puntos d y e. Si____ No___ Por qué?_________________________________________________________
    g. ¿Cuál es la herramienta matemática más apropiada para calcular de manera exacta la distancia desde el origen? __________________________ Haga uso de ella para encontrar la distancia al origen de los puntos (3,3) y (4,3).
3. Haga uso del geoplano rectangular, y con ayuda de las bandas elásticas de diferentes colores, ubique las componentes rectangulares y el segmento formado desde el origen hasta cada punto dado en cada caso.

a. El punto (4,6)
b. El punto (-4,0)
c. El punto (-6,2)

d. El punto (-6,-4)

4. Dado el plano cartesiano determine la posición y ubique en él seis (6) puntos que estén a una distancia de dos unidades respecto al origen.

   Si continuamos ubicando puntos a la misma distancia respecto al origen ¿qué figura obtenemos? ___________ , además determina cuántos puntos es posible ubicar en ella. ______________________________________________________________________




***Ubicación números laterales en el plano***
Fuente: Editado de Geogebra

En el círculo Goniométrico (círculo unitario), ubique los puntos A=(0,1), B=(1,0), C=(-1,0), D=(0,-1)

a. ¿Cuáles pares de puntos son diametralmente opuestos? ______________________

b. ¿Cuál es el ángulo de rotación del segmento medido desde el origen al punto (1,0) para ubicarse en su respectivo opuesto? ________

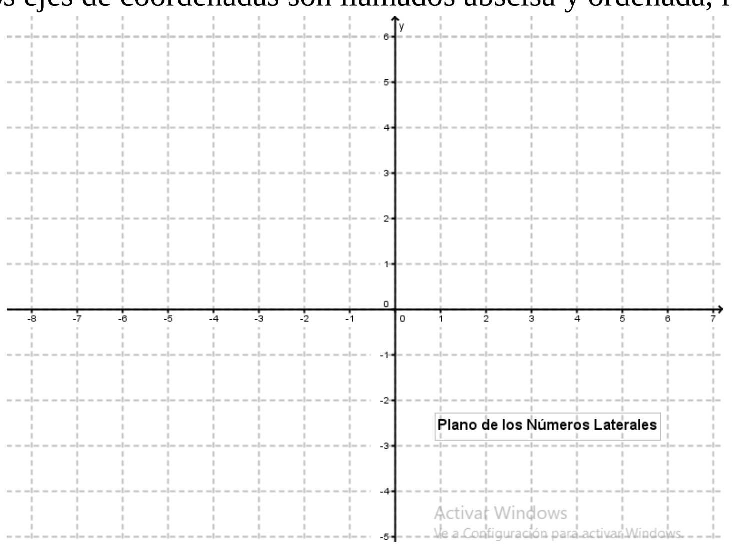
c. ¿Cuál es la coordenada del extremo, del segmento que va desde el origen al punto (1,0), luego de rotar un ángulo de 90° $= \frac{\pi}{2}\ rad$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj? _____

d. ¿Cuál es la coordenada del extremo del segmento que va desde el origen al punto (-1,0), luego de rotar un ángulo de $90° = \pi/2\ rad$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj?______

e. ¿Cuál es la coordenada del extremo, del segmento que va desde el origen al punto (0,-1), luego de rotar un ángulo de $\mathbf{90}° = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{rad}$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj?_______

**Definición de Número Lateral**:

Un número Lateral se define como un punto del plano de coordenadas $(x, y)$, o un par ordenado, en que la primera componente corresponde al **eje $\boldsymbol{x}$ u horizontal** y la segunda componente al **eje y o vertical**. Los ejes de coordenadas son llamados abscisa y ordenada, respectivamente.

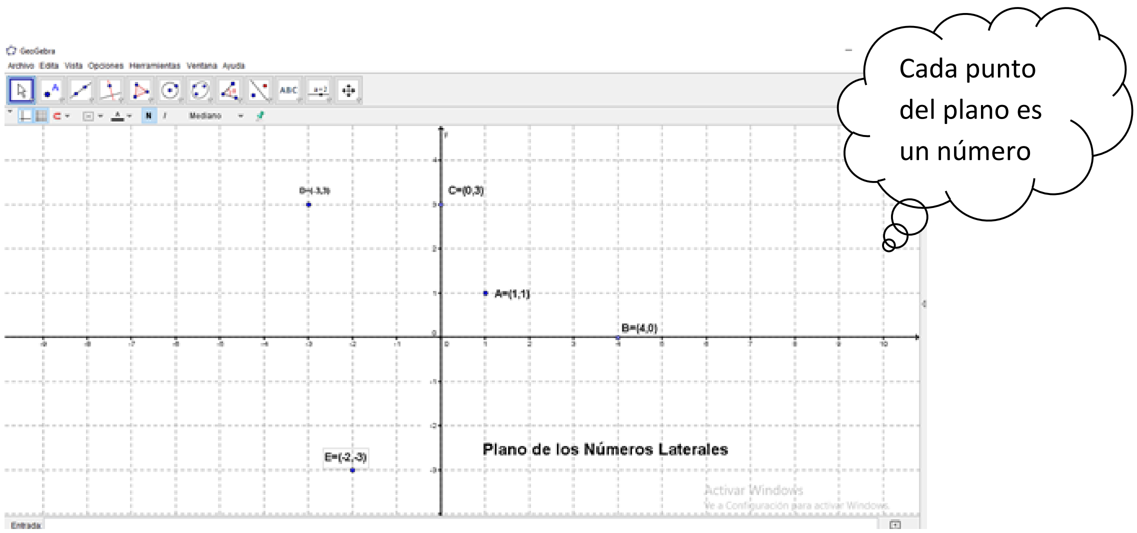



***Plano de los números laterales***
Fuente: Editado de Geogebra

Los números laterales, incluyen aquellos que están sobre los ejes coordenados, considerando que una de sus componentes es cero.

De esta manera, los siguientes puntos son ejemplos de números laterales:

$A = (1,1)$, $B = (4,0)$, $C = (0,3)$.
$D = (-3,3)$, $E = (-2,-3)$.

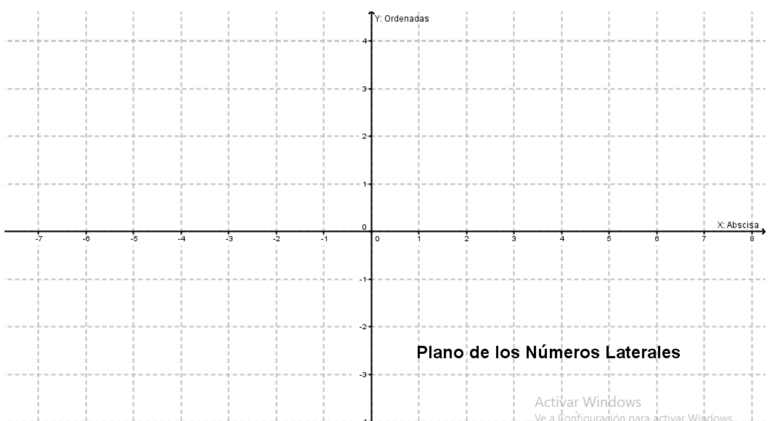



***Números en el plano de los NL***
Fuente: Editado de Geogebra

## Actividad Individual N°2.

1. Ubica los siguientes números en el plano y determina La abscisa y la ordenada de cada punto.

   $A = (2{,}0);\;\; B = (1{,}3);\;\; C = (-2{,}2);\;\; D = \;(-4{,}0);\;\; E = (1,-3)$

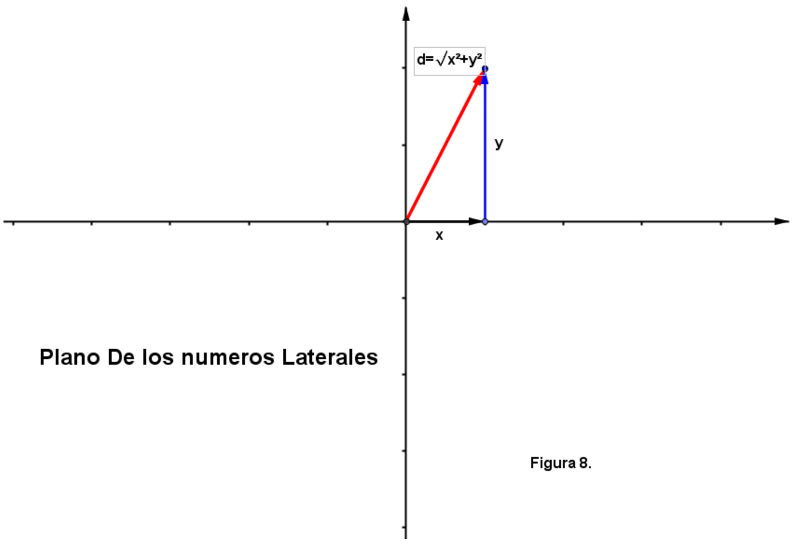



***Ubicación de números en el plano de los NL***
Fuente: Editado de Geogebra

2. Con ayuda del Geoplano rectangular ubique diversos números laterales colocando los puntos con plastilina, determine la componente horizontal y la vertical. Además, recuerda que el plano cartesiano es nuestro nuevo conjunto numérico.
3. Si cada punto del plano es un número, ¿es posible realizar todas las operaciones que efectuamos con los números reales? Discute con tus compañeros tu respuesta.

**Medida de un número lateral:**

La medida o valor absoluto de un número Lateral $z$, se define como la distancia del origen del plano al punto $z = (x, y)$. Además como $x, y$ son las componentes rectangulares y aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que la distancia de $z$, notada $|z|= \sqrt{x^2 + y^2}$




***Medida del Número lateral***
Fuente: Editado de Geogebra

Por ejemplo hallemos la medida de los siguientes números $z_1 = (3,4)$

$|z_1|= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, lo que significa que del origen al número $z_1$ hay una distancia de 5 unidades.

$z_2 = (1, -3)$

$|z_2|= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$, lo que significa que del origen al número $z_2$, hay una distancia de $\sqrt{10}$ unidades.

Así también es fácil notar que si $z_3 = (2,0) = 2$; $|z_3|$=2 y de igual manera

Si $z_4 = (0, -\pi)$. Su módulo es $|z_4|= \pi$. Ya que la distancia al origen es justamente esa medida, verifícalas a través de la expresión que permite hallar la distancia o valor absoluto.

Es importante concluir que la medida o módulo de un número lateral es mayor o igual que cero. Es decir $|z| \geq 0, \forall\ N.L$

¿En qué caso la distancia es cero?_____, justifica tu respuesta.

---

**Distancia entre dos puntos:**

Como los números laterales son puntos del plano, es posible encontrar la distancia que separa dos puntos cuales quiera de ellos mediante la expresión:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

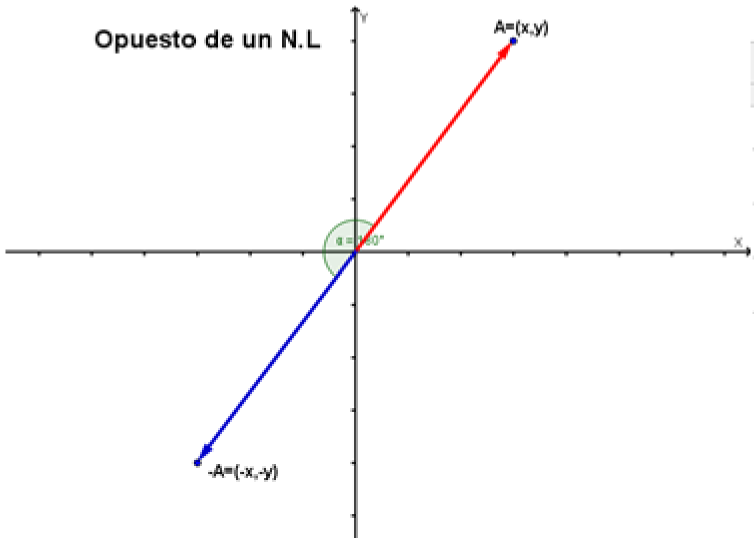
Donde $A = (x_1, y_1)$ $\quad y \quad$ $B = (x_2, y_2)$

**En tu cuaderno**

Halla la medida de cada uno de los números laterales del ejercicio anterior, determina la distancia entre los puntos A y B. Además, representa cada situación en el plano cartesiano.

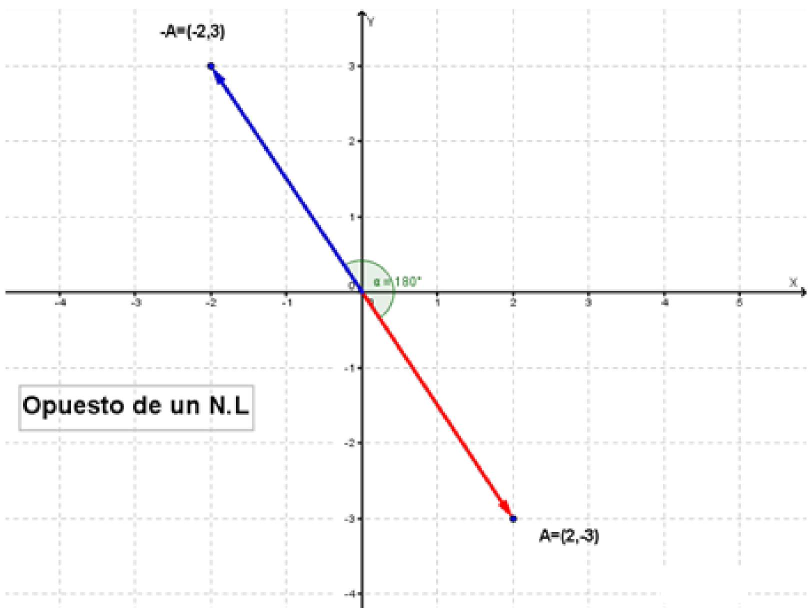
**Opuesto de un número lateral**

El opuesto de un número lateral $(a, b)$, es otro número lateral $-(a, b) = (-a, -b)$, que se obtiene al rotar $180^0$ el seudo-vector que genera el número $z$, similar a lo que sucede con los números reales cuando se multiplica por -1 un real positivo.




***Opuesto de un número lateral***
Fuente: Editado de Geogebra

Ejemplo. 1. $Si\ z = (2,-3), entonces -z = -(2,-3) = (-2,3)$




***Ejemplo del opuesto de un número lateral***
Fuente: Editado de Geogebra

**Ejemplo 2.** Según la información cartográfica de un país, dos ciudades A y B ocupan posiciones opuestas; si de acuerdo al plano cartográfico la ciudad A ocupa la posición A= (30,50). ¿En qué posición estaría la ciudad B y que distancia las separa?

Como las dos ciudades ocupan posiciones opuestas la posición de B=-A= (-30,-50). Y la distancia entre las ciudades se obtiene mediante la expresión:

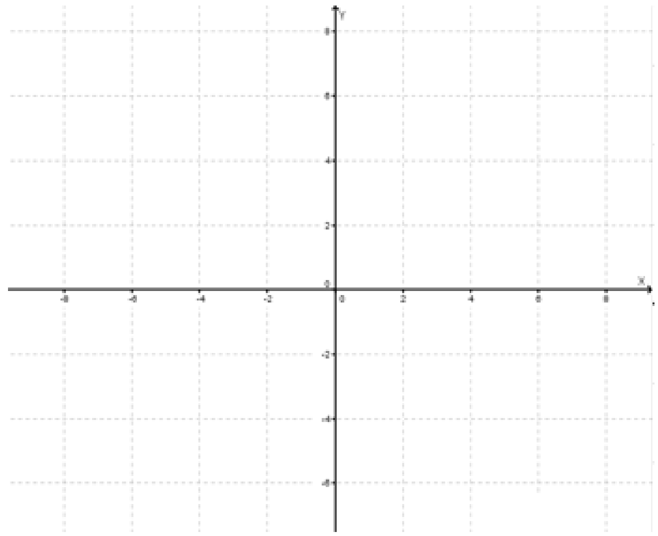
$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-30-30)^2 + (-50-50)^2} =$

$\sqrt{(-60)^2 + (-100)^2} = \sqrt{3600 + 10000} = \sqrt{13600}$ =116,61

Lo que significa que las ciudades están separadas una distancia de 116,61 unidades.

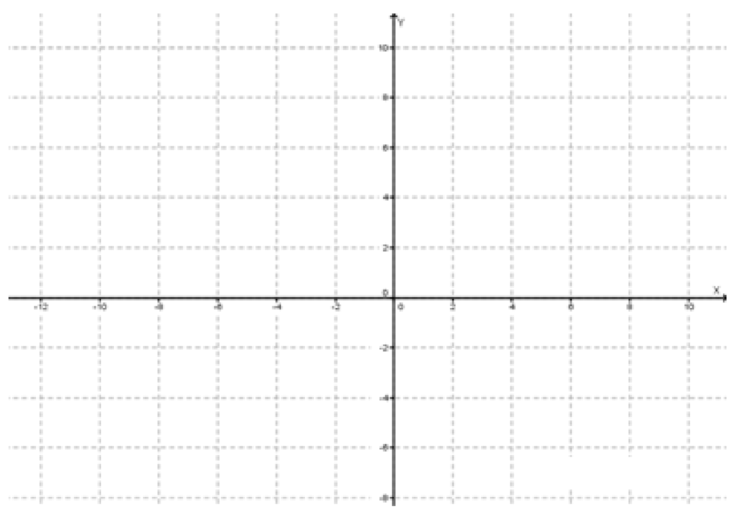
**Actividad N° 3. Realice en forma individual los siguientes ejercicios.**

1. Represente en el plano cartesiano los siguientes pares de N.L y halle la distancia entre ellos en cada caso.
   a. A= (2,3) y B= (5,7)
   b. A= (4,7) y B= (-2,-1)
   c. A= (20,60) y B= (80,-50)
2. Represente en el plano cartesiano el opuesto de cada uno de los siguientes números y dibuja en el mismo plano y con colores diferentes los segmentos que representan el número y su opuesto en cada caso.
   a. A= (4,0) b. B= (2,6) c. C= (-1,8) d. E= (-4,-2)



***Plano de los NL para representar opuestos de números***
Fuente: Editado de Geogebra

3. Dibuje en el siguiente plano cartesiano el triángulo cuyos vértices son los números: A= (1,2); B= (4,6) y C= (-1,3) y el triángulo cuyos vértices son: A’, B´ y C´, puntos opuestos a cada vértice que le corresponde al triángulo A, B, C. Describa además la rotación que realiza la figura final respecto a la inicial.

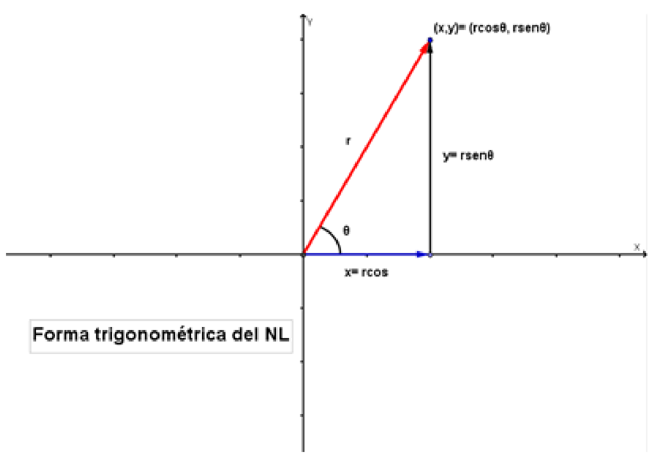


***Construcción de triángulo y su imagen con los opuestos***
Fuente: Editado de Geogebra

4. La ciudad tiene claramente demarcadas sus calles de oriente a occidente y sus carreras de norte a sur, como también el punto de referencia de donde parte la nomenclatura. Es decir, cada dirección es un punto (calle, carrera). Si dos amigas desean encontrarse en la mitad de las posiciones en que están ubicadas sus viviendas cuyas posiciones son (9,7) y (21,9). Discute con tus compañeros cual es el punto donde deben encontrarse. Determine además la distancia que separa las dos viviendas.
5. Preciso mis conocimientos, investiga cómo se calcula el punto medio entre dos puntos A y B en el plano de dos dimensiones.

### *El Número Lateral en forma trigonométrica*

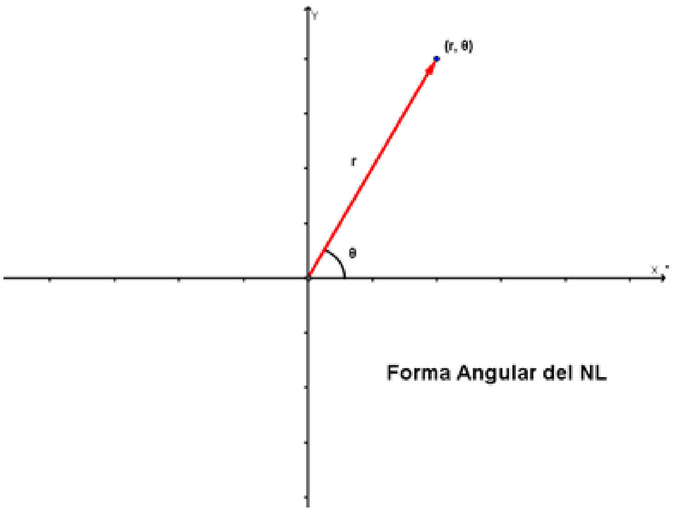
Los números laterales son de la forma $z = (x, y)$, y considerando que las componentes rectangulares $x, y$ del número $z$, se pueden escribir como $x = |z|\ \cos\theta, y = |z|\ sen\,\theta$, donde $|z|$ es la distancia desde el origen hasta el punto z, θ es el ángulo en posición normal, que forma el segmento dirigido OZ con el semi-eje positivo de las x. De tal manera que el número lateral z se puede escribir como: $Z = (rcos\theta,\ rsen\theta) = r(cos\theta, sen\theta)$, Donde $r = |z|$, expresión esta conocida como forma trigonométrica del número lateral.




***Forma trigonométrica del número lateral***
Fuente: Editado de Geogebra

*Forma angular de un número lateral*

Si en el plano cartesiano ubicamos un número lateral $z$ , determinando la distancia desde el origen al punto $z$, esto es: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el ángulo que forma el vector con la horizontal $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$, la pareja **(r, θ)**, compuesta por una distancia medida desde el origen hasta el número lateral y un ángulo positivo medido desde el semi-eje positivo de las $x$ hasta el vector generado por el origen y el número lateral $(x, y)$, es llamada forma angular de un número lateral.




***Número lateral en forma angular***
Fuente: Editado de Geogebra

**Ejemplo.** Sea el número lateral $z = (4{,}4)$, escribirlo en forma angular, en forma trigonométrica y representarlo gráficamente.

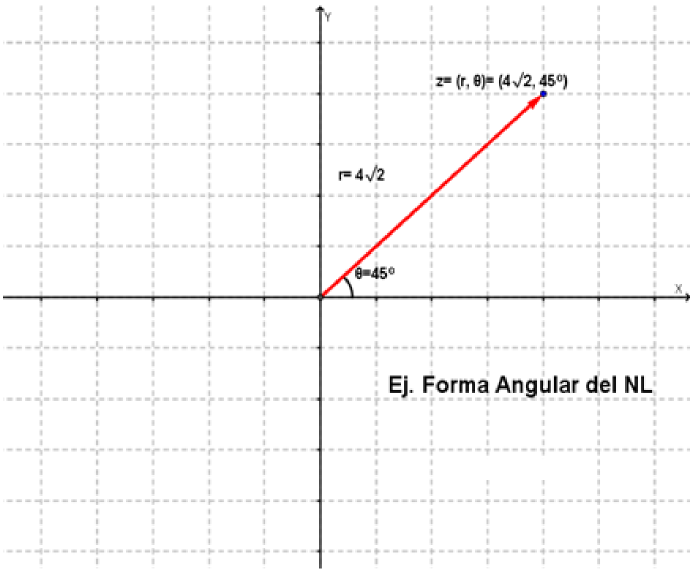
X=4, y=4; luego $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{2 * 16} = 4\sqrt{2}$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) = tan^{-1}1 = 45° = \frac{\pi}{4}\ rad$$

Luego se tiene que el número $z$ en coordenadas polares es:

$$z = (r, \theta) = \left(4\sqrt{2}\,,\ \frac{\pi}{4}\ rad\right) = r(cos\theta,\ sen\theta) = 4\sqrt{2}(cos45°,\ sen45°)$$

En forma gráfica se tiene.




***Ejemplo NL en forma angular***
Fuente: Editado de Geogebra

**Anexo 8**

**Secuencia Didáctica para la Enseñanza de los Números Laterales. Parte II**

**Asignatura:** Trigonometría

**Unidad Temática:** Transformaciones

**Tema:** Operaciones con números laterales y transformaciones.

**Contenidos:** Los números laterales en forma exponencial, operaciones con números laterales y transformaciones en los números laterales.

**Duración de la secuencia:** 4 Horas.

**Población**: 36 estudiantes de la Institución Educativa Empresarial Dosquebradas.

**Objetivos:**

- Realizar operaciones con números laterales y aplicarlas en situaciones cotidianas.
- Calcular potencias y raíces de números laterales aplicando el teorema de Moivre.
- Comprender el concepto de función o transformación en los números laterales.

**El Número Lateral en forma exponencial**

**Formula de Euler**

**El número e.**

Uno de los números más utilizados en las matemáticas es el número irracional $e$ o número de Euler, el cual podemos obtener calculando los términos de la sucesión

$s_n$=$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left\{2,\frac{9}{4},\frac{16}{9},\frac{25}{16},\frac{36}{25},\frac{49}{36},\frac{64}{49},\ldots\right\}$. Hallando algunos términos de la sucesión podemos verificar que sus valores están entre

$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ Y que al hacer n muy grande la sucesión converge hacia el valor de:

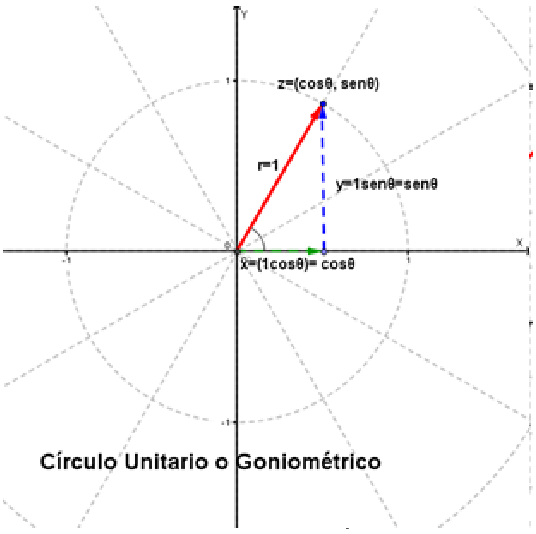
$$e\approx 2{,}71828182846$$

Esta constante aparece en conexión con los números laterales mediante la relación

$$e^{\sqrt{-1}\theta}=(cos\theta, sen\theta)$$

Donde el lado derecho representa un número lateral en el círculo unitario, que forma un ángulo $\theta$ respecto a la horizontal. Dicha fórmula se conoce como Fórmula de Euler en honor a Leonhard Euler, quien la descubrió cerca del año 1.740.

Una aplicación de la misma es la famosa expresión $\boldsymbol{e^{\sqrt{-1}\pi}} = (\boldsymbol{cos\ 180°}, \boldsymbol{sen\ 180°}) = (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{0})$; la cual relaciona los números enteros 0 $y$ 1; el número irracional $e$ y el número $\sqrt{\boldsymbol{-1}}$ , que obtenemos al girar el segmento de recta que va desde el origen al punto (1,0) un ángulo de $90^0$, en el sentido anti horario.




***Círculo unitario***
Fuente: Editado de Geogebra

Partiendo de la fórmula de Euler, y considerando que cualquier lateral z se puede expresar en forma trigonométrica como:
$Z = (rcos\theta, rsen\theta) = r(cos\theta, sen\theta) = re^{i\theta}$; siendo esta última expresión la forma exponencial de un número lateral, la cual se obtiene del producto de la distancia r y la fórmula exponencial de Euler.

**Ejemplo:** Escribir los siguientes números complejos en forma exponencial.

a. $z = (1,1)$, para ello, debemos hallar inicialmente la medida o distancia del número partiendo del hecho de que $z$ esta escrito en forma binómica, es decir $z = (x, y)$, donde $x = 1 \; e \; y = 1$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1, entonces \; \theta = tan^{-1}1 = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad

El cual en forma trigonométrica es $z = (\sqrt{2}\,)(\cos\frac{\pi}{4},\; sen\frac{\pi}{4})$ y en forma exponencial: $z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\; e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b. $z = (3, -4), x = 3,\; y = -4$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}, entonces \; \theta = tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = -53{,}13° = 306°52'12''$$
$$= -0{,}927rad = 5{,}363rad$$

El cual en forma trigonométrica es: $z = (5\,)(\cos 5{,}36\,, sen5{,}36)$ y en forma exponencial: $z = re^{i\theta} = 5\; e^{i5{,}363}$.

c. Escriba en forma binómica el siguiente número lateral escrito en forma angular: $\left(3,\; \frac{\pi}{2}\; rad\right)$.

Como el número está en forma angular, conocemos el ángulo que forma con el eje positivo y la distancia r. Es decir $\theta = \frac{\pi}{2}rad = 90° \;\; y \;\; r = 3$. Para por transformar el número en su forma binómica, se debe llevar primero a la forma trigonométrica.

$$z = (rcos\theta, rsen\theta) = (3cos90°, 3sen90°) = (3 * 0{,}3 * 1) = (0{,}3)$$

Es decir que el número $(0{,}3) = \left(3,\; \frac{\pi}{2}\; rad\right)$

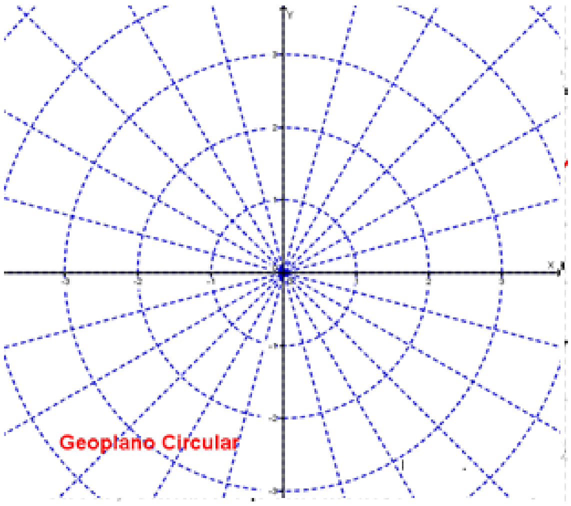
**Actividad N° 5. Individualmente realiza el siguiente ejercicio:**

1. Complete la siguiente tabla de datos con NL Escritos en forma binómica, trigonométrica y en forma exponencial:

| Forma Binómica | Forma Angular | Forma Exponencial |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{z = (1,2)}$ | | |
| | (4,0°) | |
| | | $2\sqrt{2}\,e^{i315°}$ |
| **(0,-5)** | | |

Fuente: Autor

2. Haga uso del Geoplano circular e identifique cinco números distintos cuya medida sea igual a dos unidades y expréselos de tres formas diferentes.




***Geoplano circular***
Fuente: Editado de Geogebra

3. Dados los siguientes números en forma exponencial escríbalos en forma de par ordenado.

   a. $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

   b. $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

   c. $\sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{3}}$

d. $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

**Operaciones con números laterales**

Al igual que con los números reales con los laterales podemos efectuar operaciones, resolver ecuaciones, calcular potencias y raíces, establecer funciones o aplicaciones, entre otras.

**Actividad de introducción**

Resolver en parejas el siguiente ejercicio.

1. Encuentre el número lateral $(x, y)$ tal que sumándole (1,0), sea igual a (0,0), es decir, plantee y resuelva la ecuación que conduce a la solución de dicha situación problema.
2. Halle el número $(x, y)$, en la siguiente expresión: $(x, y) + (3, -5) = (8,2)$. que verifique la igualdad.
3. Si $z = (2,3)$, por qué cantidad debemos multiplicar el número para para que se ubique en su opuesto (-2,-3).

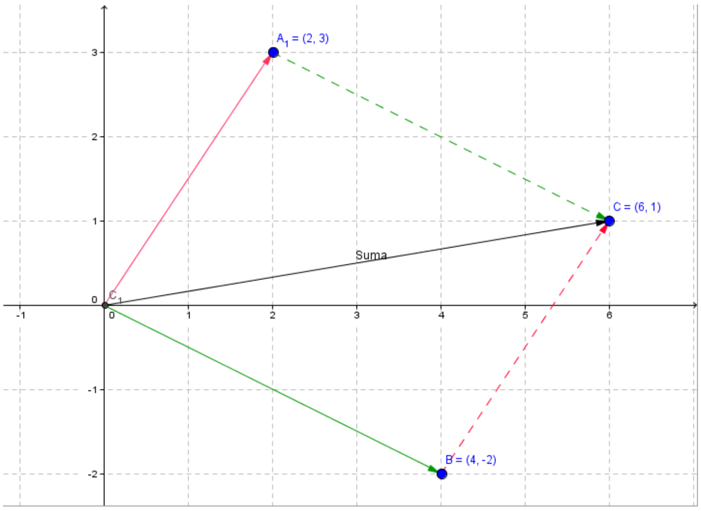
**Suma de números laterales**

Para sumar dos números Laterales tenemos que sumar sus **componentes**, pero se debe tener en cuenta que solo se puede entre las componentes de la misma naturaleza, es decir, ordenada con ordenada y abscisa con abscisa. Así, por ejemplo, el NL (2,3) sumado con (4,-2) da como resultado otro número lateral (6,1).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | = | ( | 2 | , | 3 | ) |
| B | = | ( | 4 | , | -2 | ) |
| A+B | | ( | 6 | , | 1 | ) |

**Figura x. Suma de NL en Excel**
Fuente: Editado de Excel

Estos tres puntos se pueden representar en el plano, como sigue.




***Suma de Números laterales en forma gráfica***
Fuente: Editado de Geogebra

Nótese, el paralelogramo que se forma al trasladar cada vector al lado opuesto. Este método de suma se le conoce como *Método del Paralelogramo* y se utiliza para representar gráficamente la suma numérica entre NL. En términos generales, la suma de dos números complejos $z_1 = (x, y)$, $z_2 = (u, v)$, es otro número lateral $z$ tal que:

$z_1 + z_2 = (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$; es decir, se establece una combinación lineal entre las componentes similares de cada punto.

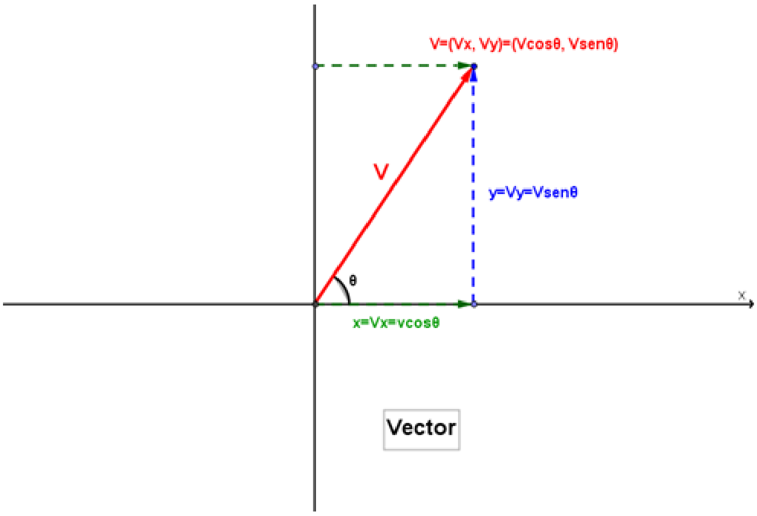
**Vector:** Se llaman magnitudes vectoriales aquellas que requieren para su definición una medida llamada norma, y una indicación de orientación llamada dirección. En otras palabras, un vector es un segmento dirigido de un punto a otro. Al primer punto se le llama origen y al segundo extremo.

Un vector se representa por una letra "v", con una flecha en la parte superior, mientras que la norma se representa entre dos barras $|V|$, un vector está determinado por la dirección y la magnitud.

La **Dirección** está asociada al ángulo que forma el vector con el eje horizontal, en un sistema de coordenadas.

Este ángulo permite descomponer un vector v en dos elementos llamados componentes rectangulares, expresadas como vx y vy. Así un vector v se puede expresar como v= (Vx, Vy).

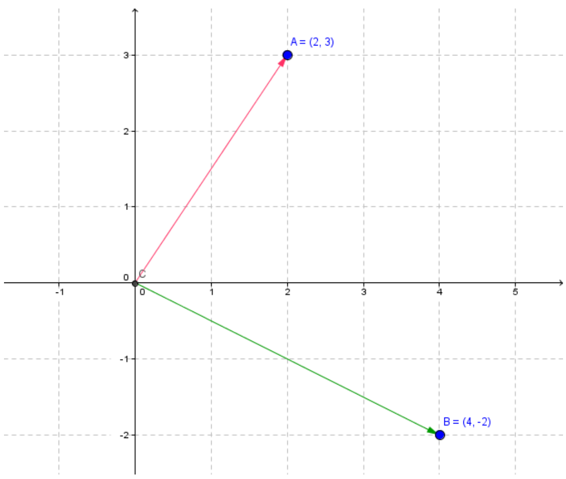
Observamos que la anterior definición corresponde a una de las representaciones de los números laterales.




***Número lateral como seudo-vector***
Fuente: Editado de Geogebra

Donde $Vx = x\,;\quad Vy = y\,;\quad z = V.$

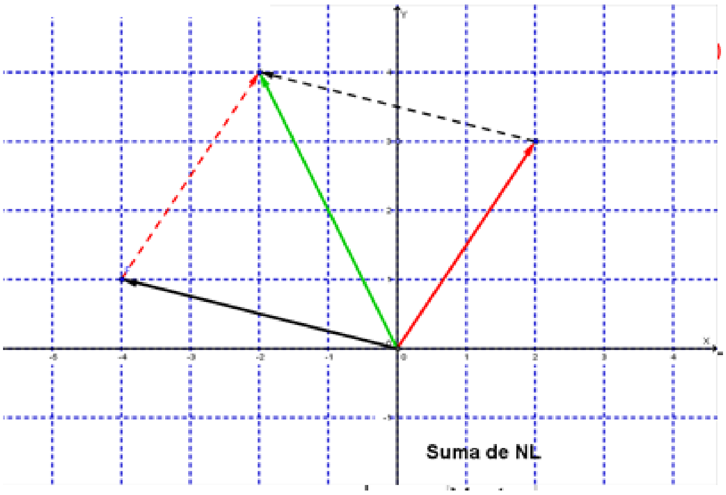
De acuerdo con esta definición los números laterales los podemos considerar seudo-vectores en el plano, es decir, flechas que se desplazan desde el origen hasta los puntos indicados.




***Ejemplo representación NL como seudo-vector***
Fuente: Editado de Geogebra

**Ejemplo:**

Sumar los números $z_1 = (2,3)\ con\ z_2 = (-4,1)$ y expresar la suma en forma gráfica. $z_1 + z_2 = (2,3) + (-4,1) = (2-4,3+1) = (-2,4)$. Esto se representa en forma gráfica así:




***Suma del NL en forma gráfica***

Fuente: Editado de Geogebra

**Resta de Números laterales**

La resta de dos números laterales $z_1,\ z_2$, es equivalente a la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo. Es decir, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

Así si $z_1 = (a,b) y\ z_2 = (c,d)$.

Entonces $z_1 - z_2 = (a,b) - (c,d) = (a,b) + (-c,-d) = (a-c, b-d)$.

Ejemplo. Sean $z_1 = (5,2)\ y\ \ z_2 = (3,-3)$. Hallar: $a.\ \ z_1 - z_2\ \ y\ \ \ b.\ \ z_2 - z_1$

a. $z_1 - z_2 = (5,2) - (3,-3) = (5,2) + (-3,3) =$

$$\big((5-3),(2+3)\big) = (2,5).$$

b. $z_2 - z_1 = (3,-3) - (5,2) = (3,3) + (-5,-2) =$

$$\big((3-5),(-3-2)\big) = (-2,-5)$$

Nótese que $z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$

c. Una ciudad tiene claramente demarcadas las calles de manera vertical y las carreras en forma horizontal; es decir cada punto de la ciudad es una pareja $(clle, cra)$. Un mensajero que efectúa los siguientes servicios: Inicialmente va a la dirección $A =$

$(2,4)$, regresa a la oficina por otra encomienda y va a la dirección $B = (1,5)$, desea saber cuál será su ubicación si hace los dos recorridos en forma continua y que distancia lo separa de la dirección A, cuando está en la dirección B.

**Respuesta:**

Para hallar la ubicación basta con sumar los números correspondientes a los puntos A y B.

$A + B = (2,4) + (1,5) = (2 + 1,4 + 5) = (3,9)$, es decir, estaría en la calle 3ª con carrera 9ª

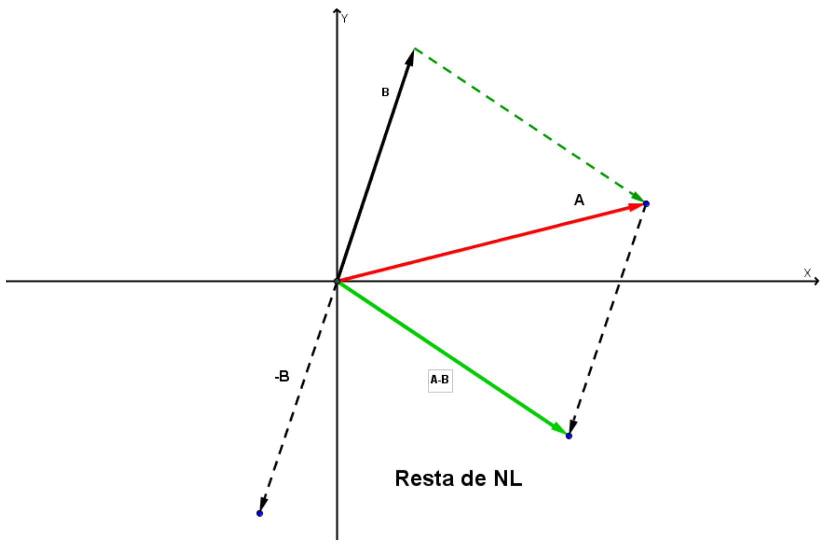
Mientras que para hallar la distancia que separa los puntos $A\ y\ B$, basta con establecer la diferencia entre ellos y luego aplicar la ecuación que permite hallar la distancia, esto es:

$A - B = (2,4) - (1,5) = (2 - 1,4 - 5) = (1,-1)$

Luego $r = \ IzI = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \ \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, es decir lo separa $\sqrt{2}$ unidades de B

**Resta de números laterales en forma geométrica**

Para restar dos números laterales en forma geométrica, digamos $z_1 - z_2$, se ubica el primer complejo en el plano, $z_1$, y a continuación se coloca el segmento del opuesto de $z_2$ en el correspondiente a $z_1$. El complejo resultante $z_1$-$z_2$ se ubica en el extremo final de $z_2$ (ver gráfico).




***Resta en forma gráfica de NL***
Fuente: Editado de Geogebra

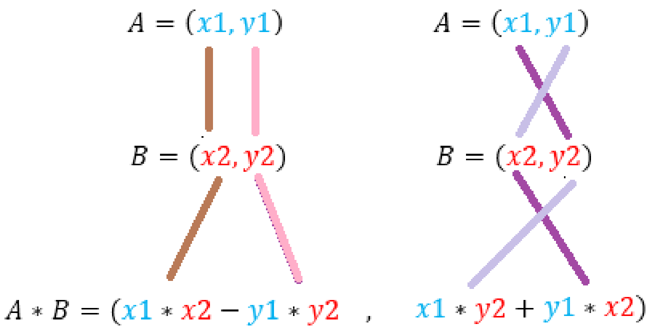
**Multiplicación de números laterales**

Para la multiplicación ocurre algo similar a la suma, es decir, el resultado es un NL, pero el algoritmo es algo distinto.

Sea $A = (x1, y1)$ y $B = (x2, y2)$

$$A * B = (x1 * x2 - y1 * y2\ , x1 * y2 + y1 * x2)$$

Un modo sencillo de hacer esta operación sería seguir las líneas de la siguiente figura, multiplicando las componentes indicadas y colocando su resultado en donde se muestra:




Dibujar en el siguiente plano los NL (1,3) y (2,1), realizar la multiplicación ubicar nuevo punto en el plano.

En general, el diagrama anterior nos conduce a la siguiente definición:

Sean $z_1 = (x_1, y_1)$; $z_2 = (x_2, y_{2)}$; el producto está dado mediante la expresión:

$$z_1 * z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Ejemplo 1: Hallar el producto de los siguientes números complejos

$$z_1 = (3,4)\ y\ z_2 = (-2,1), entonces\ z_1 * z_2 = (3,4) * (-2,1)$$

$$z_1 * z_2 = ((3)(-2) - (4)(1), (3)(1) + (4)(-2)$$

$$= (-6 - 4, 3 - 8) = (-10, -5)$$

Ejemplo 2: Halle el producto de los números $(1,1)\ y\ (1,2)$

$$(1,1) * (1,2) = (1 * 1 - 1 * 2\ , 1 * 2 + 1 * 1) = (1 - 2\ , 2 + 1) = (-2,3)$$

**Multiplicación en forma trigonométrica**

Para multiplicar dos números laterales en forma trigonométrica, multiplicamos las distancias y sumamos los ángulos; es decir, si $z_1 = (\mathrm{r}_1\cos\theta_1, \mathrm{r}_1\mathrm{sen}\theta_1)$ y $z_2 = (\mathrm{r}_2\cos\theta_2, \mathrm{r}_2\mathrm{sen}\theta_2)$, entonces:

$z_1.z_2 = (r_1r_2\cos(\theta_1 + \theta_2), r_1r_2\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2))$, es decir el producto de dos números laterales es otro número lateral en el cual su distancia r es el producto de las distancias $r_{1,}r_2$ y el ángulo es la suma de los ángulos $\theta_1, \theta_2$

Ejemplo: halle el producto entre los números:

Si $z_1 = (3\cos 30°, 3\mathrm{sen}30°)$ y $z_2 = (4\cos 60°, 4\mathrm{sen}60°)$, entonces

$$z_1.z_2 = (r_1r_2\cos(\theta_1 + \theta_2), r_1r_2\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

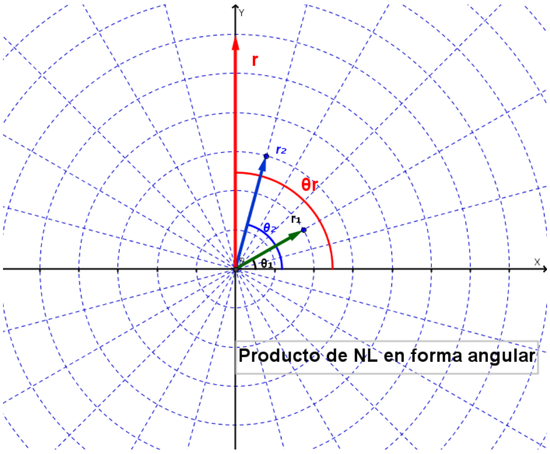
$$= (3 * 4\cos(30° + 60°), 3 * 4\mathrm{sen}(30 + 60)) = (12\cos 90, 12\mathrm{sen}90)$$

$$= (12 * 0, 12 * 1) = (0, 12)$$

**Multiplicación en forma angular**

También es posible obtener la multiplicación de números laterales en forma angular y en forma exponencial, así:

En Forma angular: $z_1 = (r, \theta)$ y $z_2 = (m, \alpha)$, entonces $z_1 * z_2 = (r, \theta).(m, \alpha) = (r.m, \theta + \alpha)$

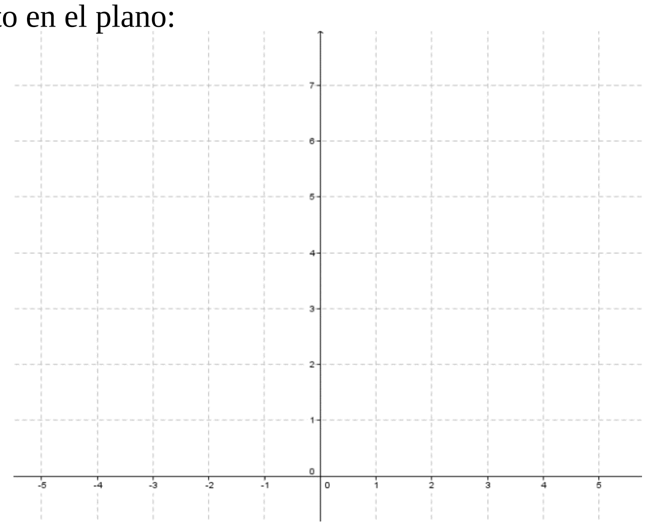



***Multiplicación del NL en forma angular***

Fuente: Editado de Geogebra

**Actividad N° 6. En grupo de tres estudiantes**

1. Dibujar en el siguiente plano los NL (1,3) y (2,1), realizar la multiplicación ubicar nuevo punto en el plano:



***Representación de multiplicación en forma angular***

Fuente: Editado de Geogebra

2. De la actividad anterior con NL, medir con **transportador y regla** el ángulo y el tamaño de cada seudo-vector, completar la siguiente tabla y responder las siguientes preguntas:

| Número lateral | Tamaño | Ángulo |
| --- | --- | --- |
| **A = ( 3 , 1 )** | | |
| **B = ( 1 , 4 )** | | |
| **A*B = (      ,      )** | | |

a. ¿Qué relación encontraste entre los tres ángulos de la tabla? __________________________________________________________________________________

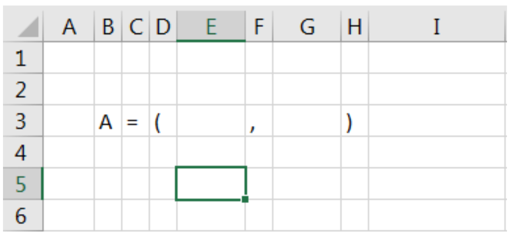
b. ¿Qué relación hay entre los tamaños de los NL?______________________________________________________________________________

c. Describir un método que permita multiplicar NL geométricamente__________________________________________________________________

**Calculadora de Números Laterales**

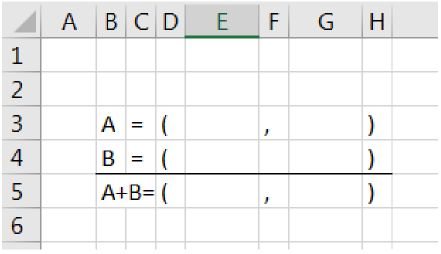
A continuación, se explicará cómo se programa una calculadora de NL en hojas de cálculo.

1. Abrir una hoja de cálculo. Escribir en las celdas los símbolos espacios necesarios para escribir un Número Lateral A=( , ); cambiar si deseas, el tamaño a las celdas.



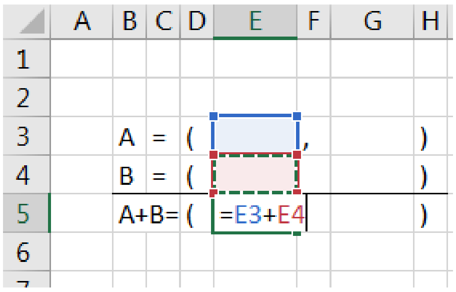

***Proceso construcción de calculadora en Excel***
Fuente: Editado de Geogebra

2. Repetir el procedimiento debajo para el número lateral B
3. Resaltar el lado inferior de las casillas B4 a H4, y repetir el proceso del punto 2 para el resultado de  A+B, como ilustra la siguiente figura.



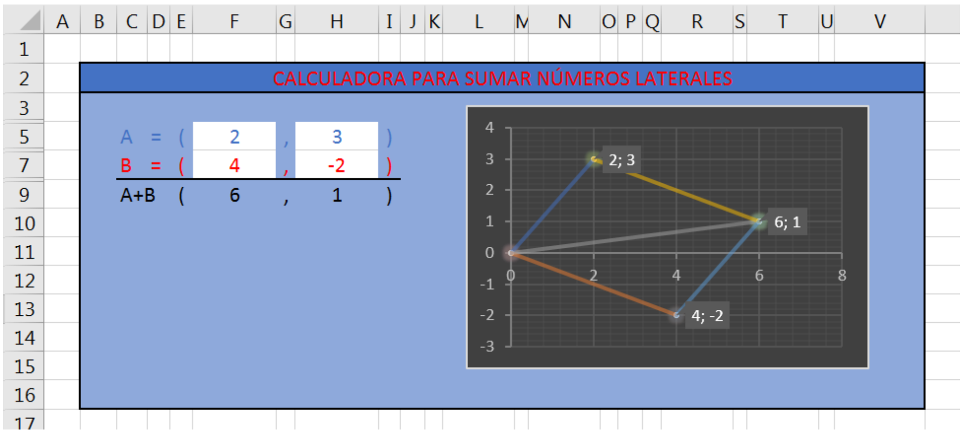

***Proceso construcción de calculadora en Excel II***
Fuente: Autor

4. En la primera componente del número A+B escribir la fórmula "=E3 + E4" luego presionar la tecla Enter.




***Proceso construcción de calculadora en Excel III***
Fuente: Editado de Geogebra

5. Realizar el mismo procedimiento en la celda G5 para las componentes **y** de los números laterales **A** y **B**.
6. Pintar las celdas de la calculadora de tal forma que los espacios donde escriben los NL estén de otro color como la Ilustración x.
7. Insertar la gráfica con los valores de los tres vectores para ilustrar la operación como en la siguiente ilustración.




***Visualización resultados de la calculadora***
Fuente: Autor

**Actividad N° 7. En forma Individual**

1. Comprobar en la calculadora las siguientes operaciones haciendo uso de tu calculadora de números laterales.

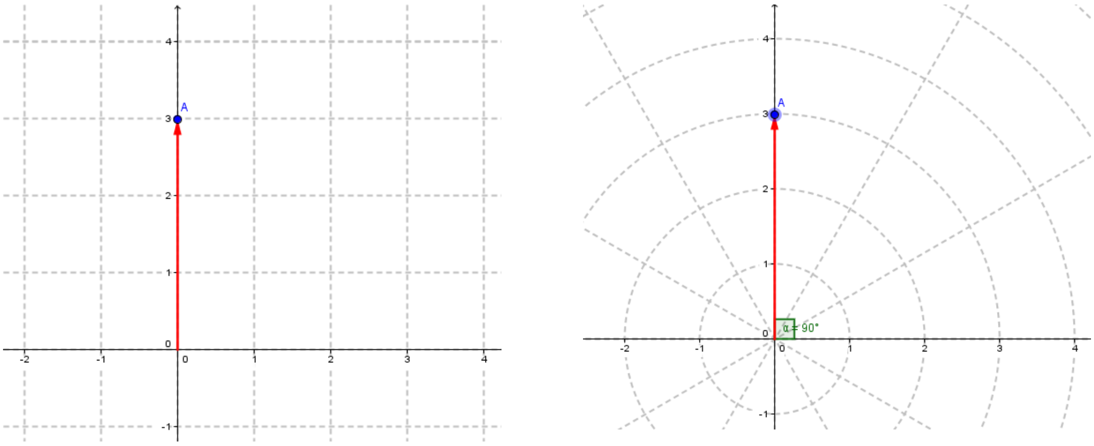
| | |
|---|---|
| (52, 300)+(-232, 53)= | (10, -10)+(-10, 10)+(10, 0)= |
| (-242, -39)+(1, 543)= | (-20, -30)-(-5, -10)= |
| (42, 95)+(-21, 33)= | (-2, -3)+(5, 3)+(3, -2)= |
| (35, -70)+(20, -10)= | (1, 0)+(0, 2)+(0, 2)+(1, 2)= |
| (-15, 40)+(12, -2)= | (20, -2)+(-30, -1)+(11, 2)+(5,-2)= |

2. Realiza en una nueva hoja de cálculo una multiplicadora. Y escribe los pasos que realizaste ______________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________

3. $A = (\boldsymbol{Tama}\text{ñ}\boldsymbol{o}, \text{Á}\boldsymbol{ngulo})$

***Comparación de los dos tipos de coordenadas***

| Coordenada cartesiana | Coordenada angular |
|---|---|
| **A = ( 0, 3 )** donde A, tiene 0 unidades en el **eje x** y 3 unidades en el **eje y** | **A = ( 3 , 90º )** Donde A, tiene un tamaño de 3 unidades y un ángulo de 90 grados |




***Comparación planos de representación de los NL***
Fuente: Editado de Geogebra

Recuerda que el plano de la derecha es llamado **Geoplano Circular.**

Dibujar en el geoplano circular los siguientes puntos

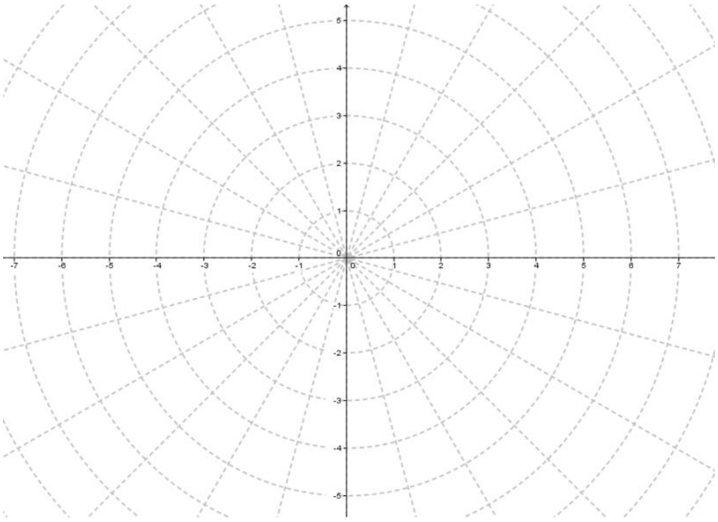
$$M = (5{,}30º)$$

$N = (4.5{,}165º)$

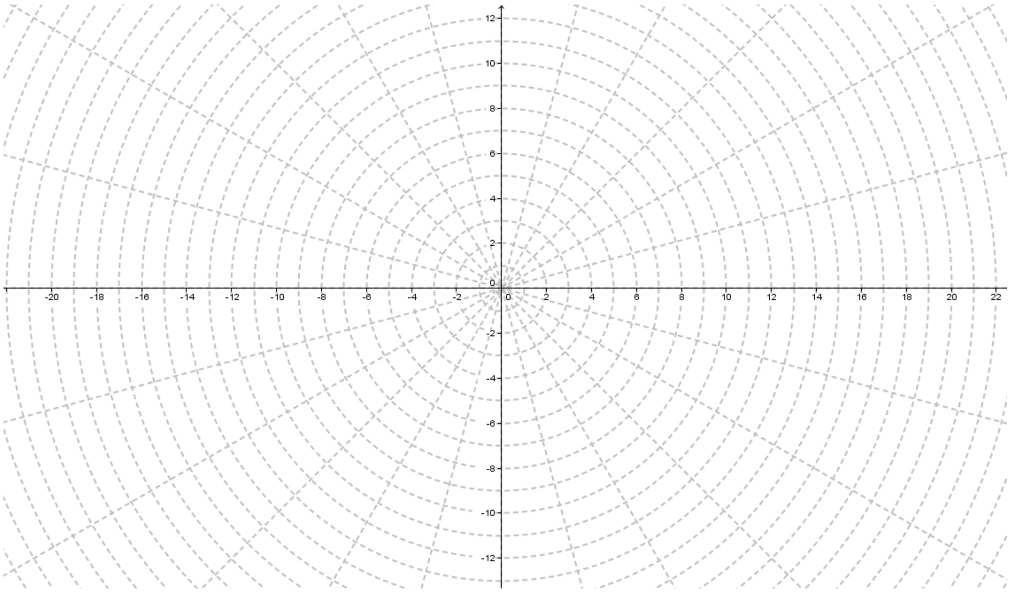
$\tilde{N} = (2.5, -105º)$

$O = (1, -135º)$

$P = (3.2, -180º)$



***Ubicación de NL en forma angular***
Fuente: Editado de Geogebra



***Plano circular de los números laterales***

Fuente: Editado de Geogebra

4. Según se ha concluido el algoritmo para multiplicar dos Números Laterales en forma angular es simplemente _1)_____________ los tamaños y _2)___________ sus ángulos.

   1)

   a. Sumar
   b. Restar
   c. Multiplicar
   d. Dividir

   2)

   a. Sumar
   b. Restar
   c. Multiplicar
   d. Dividir

5. Con ayuda del geoplano multiplica los siguientes NL.

| | **A** | **B** | **A*B** |
|---|---|---|---|
| **1.** | ( 3 , -30º ) | ( 4 , -60º) | |
| **2.** | ( 2 , -165º ) | | (4,180°) |
| **3.** | ( 4 , 15º ) | ( 5, 15) | |

Fuente: Autor

**División de números laterales**

Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, dos números laterales, $z_2 \neq 0$, el cociente entre ellos $\frac{z_1}{z_2} = z_1 * \frac{1}{z_2}$, es otro número lateral que se obtiene multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador $z_2$ (su conjugado es $\overline{z_2}$), lo cual hace que se elimine la parte imaginaria del denominador.

Así: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 * \frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} * \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 * \frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} * \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a,b)}{(c,d)} * \frac{(c,-d)}{(c,-d)} = \frac{(a.c+bd,-a.d+b.c)}{c^2+d^2}$$

**Ejemplo**: Efectuar la siguiente división de números laterales:

Dividir $z_1 = (2,10)\ entre \quad z_2 = (3, -1)$,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 * \frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} * \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(2,10)}{(3,-1)} * \frac{(3,1)}{(3,1)} = \frac{(2*3+10*1,-2*1+10*3)}{3^2+1^2} = \frac{(6+10,-2+10)}{9+1}$$

$$= \frac{(16,8)}{10} = \left(\frac{16}{10}\ , \frac{8}{10}\right) = (\frac{8}{5}\ , \frac{4}{5}).$$

Si los números están en forma trigonométrica sucede algo similar que con la multiplicación, es decir, se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Es decir si $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ y $z_2 = r_2(cos\theta_1 + isen\theta_2)$, con $z_2 \neq 0$ entonces $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)$.

Ejemplos: Sean $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 + 2i$ Hallemos $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 * \frac{1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} * \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(2+3i)}{(1+2i)} * \frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{2+i(-4+3)+6}{1-(2i)^2} = \frac{8-i}{1+4} = \frac{8}{5} - \frac{i}{5}$$

Si $z_1 = 4(\cos 90° + \mathrm{isen} 90°)$ y $z_2 = 2(\cos 60° + \mathrm{isen} 60°)$, hallemos $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2) = \frac{4}{2}(\cos(90° - 60°) + isen(90° - 60°))$$

$$= 2(cos30° + isen30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.5\right) = (\sqrt{3}, 1)$$

**Potencias y raíces de números laterales:**

Para el cálculo de las potencias basta con multiplicar la base de manera reiterativa las veces que exprese el exponente.

**Cuadrados de números laterales:**

Sea el número lateral $Z = (x, y)$. El cuadrado de $z$, se obtiene mediante la expresión.

$$z^2 = (x, y)^2 = (x, y) * (x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

**Cubo de un número lateral:**

$$z^3 = (x, y)^3 = (x, y)^2(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) * (x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3).$$

**Ejemplo:**

Hallemos el cuadrado del número $z_1 = (2,5)$ y el cubo de $z_2 = (1,3)$

**Solución:**

$$z_1{}^2 = (2,5)^2 = (2,5) * (2,5) = (2^2 - 5^2\,, 2 * 2 * 5) = (4 - 25\,, 20) = (-21\,, 20)$$

$$z_1{}^3 = (1,3)^3 = (1^3 - 3 * 1 * 3^2\,, 3 * 1^2 * 3 - 3^3) = (1 - 27\,, 9 - 27) = (-26\,, -18)$$

Pero hay una herramienta que nos permite realizar esta actividad de manera rápida y eficiente, ella es el teorema de Moivre.

***Raíces ene-ésimas de la unidad***

Una de las aplicaciones interesante de éste conjunto numérico es la posibilidad de hallar todas las raíces de la unidad, las cuales de acuerdo con el teorema fundamental del álgebra sus soluciones son también n, de acuerdo con el exponente de la variable, y que con los números reales no podemos encontrar en forma directa.

Es importante tener en cuenta que el número $(1,0)^n$ =(1,0), lo cual es fácil comprobar mediante la multiplicación sucesiva de puntos.

Así pues la ecuación $z^n - (1,0)^n = (0,0)$, es equivalente a la expresión $z^n - (1,0) = (0,0)$

Para resolver expresiones como la anterior una herramienta que nos facilita el proceso es hacer uso del círculo unitario y partiendo del punto (1,0), dividir el círculo unitario en n partes de acuerdo con el exponente de la ecuación y en el sentido anti horario ubicamos los puntos correspondientes al ángulo que obtuvimos en el cociente.

En el caso de que la expresión sea de la forma $z^n + (1,0)^n = (0,0)$, iniciamos en el punto (-1,0), realizamos la división del círculo en n partes y los ángulos se ubican a partir de (-1,0), en el sentido horario.

**Ejemplo:**

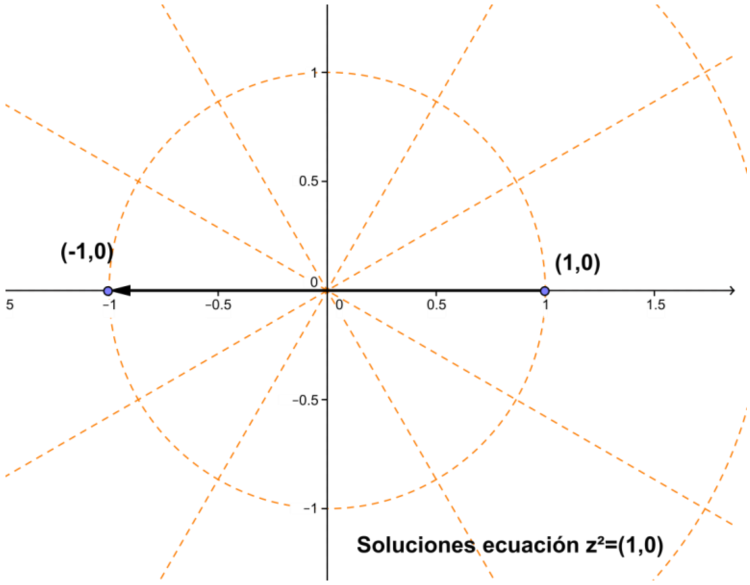
1. Resolver la ecuación $z^2 - (1,0)^2 = (0,0)$, o también $z^2 - (1,0) = (0,0)$,

   Para ello dividimos el ángulo $360° \div 2 = 180°$. Esto significa que la solución son los números $(1,0) = (cos\ 0°, sen\ 0°)$ y el número $(-1,0) = (cos\ 180°, sen\ 180°)$.

   Es posible verificar estas soluciones mediante la operación inversa que es la potenciación así:

   $(1,0)^2 - (1,0) = (0,0)$, lo cual es evidente ya que $(1,0)^2 = (1,0)$, por otro lado $(-1,0)^2 - (1,0) = (0,0)$, pero $(-1,0)^2 = ((-1)^2 - 0^2, 2 * (-1) * 0) = (1,0)$, luego

   $(-1,0)^2 - (1,0) = (1,0) - (1,0) = (0,0)$




***Raíz cuadrada del número lateral***
Fuente: Editado de Geogebra

2. Resolver geométricamente la ecuación $z^3 + (1,0) = (0,0)$, ó

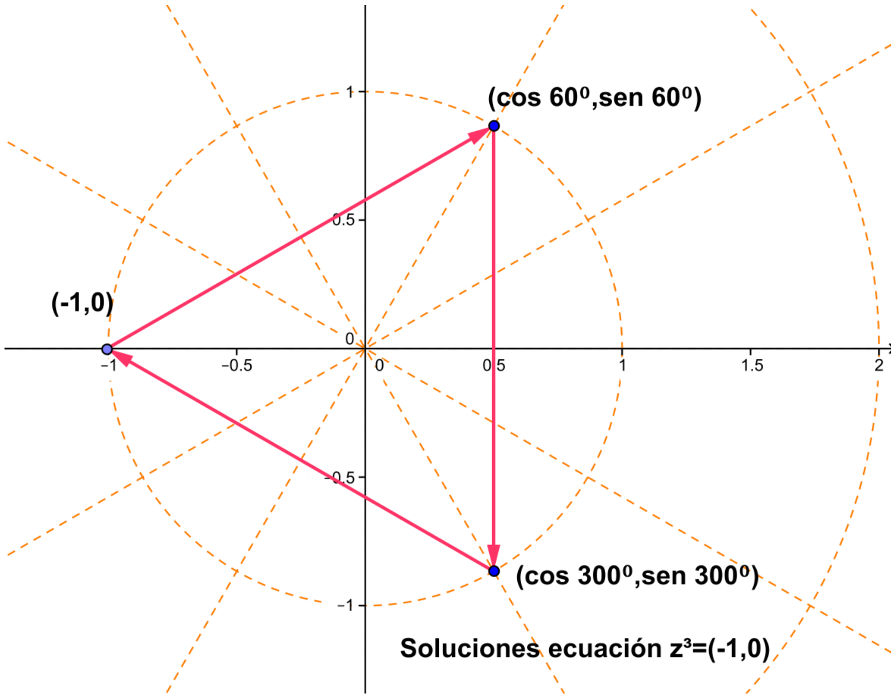
$$z^3 = (0.0) + (-1,0) = (-1,0)$$

Así entonces dividimos el ángulo $360° \div 3 = 120°$ y desde el punto (-1,0) y en el sentido horario encontraríamos la solución así: $(-1,0) = (cos\ 180°,\ sen\ 180°)$; $(cos 60°, sen\ 60°)$ y $(cos 300°, sen\ 300°)$. Verifiquemos las soluciones

Veamos si $(-1,0)^3 = (-1,0)$, es evidente por lo anteriormente mencionado. En el caso del número $(cos 60°, sen\ 60°) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ miremos si al elevarlo al cubo nos da (-1,0)

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 * \left(\frac{1}{2}\right) * (\frac{\sqrt{3}}{2})^2, \quad 3 * \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)$$

$\left(\frac{1}{8} - \frac{9}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = \left(-\frac{8}{8},\ 0\right)$=(-1,0). El estudiante puede verificar la otra solución.




***Raíz cúbica del número lateral***
Fuente: Editado de Geogebra

**Actividad N° 8. En grupo de dos estudiantes:**

1. Dados los números: $z_1 = (2,3)$, $z_2 = (4,3)$, $z_3 = (-1,-2)$, $z_4 = (-2,5)$

Realice las siguientes operaciones:

a. $2z_1 + z_2$ b. $2z_1 - z_3$ c. $z_1 * z_4$ d. ${z_2}^2$

e. $z_1 / z_3$ f. $\frac{z_4}{z_5}$ g. $z_2 / z_3$

**2.** Realice en Excel una calculadora que le permita realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división con los números laterales en forma de par ordenado y compare los resultados con ejemplos que usted proponga, efectuando las operaciones en su cuaderno.

**3.** Encuentre las raíces o soluciones de las siguientes expresiones y verifique la solución:

**a.** $z^2 + (1,0)^2 = (0,0)$

**b.** $z^3 - (1,0) = (0,0)$

***Teorema de Moivre***

Todo número lateral $z = (rcos\theta, rsen\theta)$, elevado a la n-esima potencia $z^n$, es igual a la medida r elevada a la n $(r^n)$ por el coseno de $n\theta$, $(r^n)$ veces el seno de $n\theta$; esto es.

$$z^n = (r^n.\cos(n\theta), r^n.sen(n\theta))$$

Ejemplo 1. si $z = (3cos45°, 3sen45°)$, hallemos $z^2$.

Desde el punto de vista algebraico $z^2$= z*z= $(3cos45°, 3sen45°)$*$(3cos45°, 3sen45°) = \left(9cos\ (45° + 45°), 9sen(45° + 45°)\right) = (9cos\ 90°,\ 9sen\ 90°) = (9 * 0, 9 *\ 1) = (0,\ 9)$.

Aplicando el teorema de Moivre

$$z^2 = \left(3^2\cos(2.45°),\ \ 3^2\ sen(2.45°)\right) = (9cos90°, 9sen90°) = (9 * 0 + 9 * 1)$$
$$= (0,9).$$

Ejemplo 2: si $z = (2cos30°, 2sen30°)$, hallemos $z^3$. Aplicando el teorema de Moivre tenemos.

$$z^3 = \left(2^3\cos(3.30°),\ \ 2^3\ sen(3.30°)\right) = (8cos\ 90°, 8sen\ 90°)$$
$$= (8 * 0,\ 8 * 1) = (0, 8)$$

Ejemplo 3. Si $z = (2, -2)$, hallemos $z^2$, aplicando el teorema de Moivre.

Para aplicar el teorema de Moivre, es necesario escribir el número en forma trigonométrica.

$Z = (rcos\theta,\ sen\theta)$, donde $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{-2}{2}\right) = tan^{-1}(-1) = -45° = 360° - 45° = 315°$$

Es decir $z = (2, -2) = \left(2\sqrt{2}\cos\ 315\,°,\ 2\sqrt{2}sen\ 315°\right)$, luego $z^2$

$$z^2 = \left(2\sqrt{2}\cos 315\,°, 2\sqrt{2}sen315°\right)^2$$
$$= \left((2\sqrt{2}\ )^2\cos(2 * 315°), (2\sqrt{2}\ )^2 sen(2 * 315°)\right)$$

$z^2 = (8cos630, 8sen630°) = \left(8 * 0,\ 8 * (-1)\right) = (0, -8)$.

**Actividad N° 9 en grupo.**

**Trabajando mis competencias**

1. Dados los números: $z_1 = (2,3)$, $z_2 = (4,3)$, $z_3 = (-1,-2)$, $z_4 = (-2,5)$

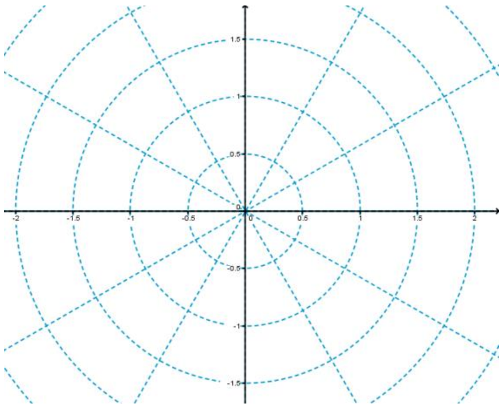
Realice las siguientes operaciones:

$a.$ $(2,0) * z_1 + z_2$ b. $(2,0) * z_1 - (3,0) * z_3$ c. $z_1 * z_4$ d. ${z_2}^2$

e. $z_1 / z_3$ f. $\frac{z_4}{z_5}$ g. $z_2 / z_3$

2. Represente gráficamente en su cuaderno cada operación.
3. Realice en Excel una calculadora que le permita realizar operaciones con los números laterales en forma de par ordenado y compare los resultados con ejemplos que usted proponga, efectuando las operaciones en su cuaderno.
4. Construya en el geoplano circular un hexágono regular de radio una unidad, donde uno de sus vértices sea el número (1,0). Complete la tabla con los otros cinco números y use el teorema de Moivre para verificar que son las raíces de la ecuación $z^6 = (1,0)$

| Vértices | Número | Sexta potencia |
|---|---|---|
| 1 | **(1,0)** | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |



***Raíces sextas del número lateral***
Fuente: Editado de Geogebra

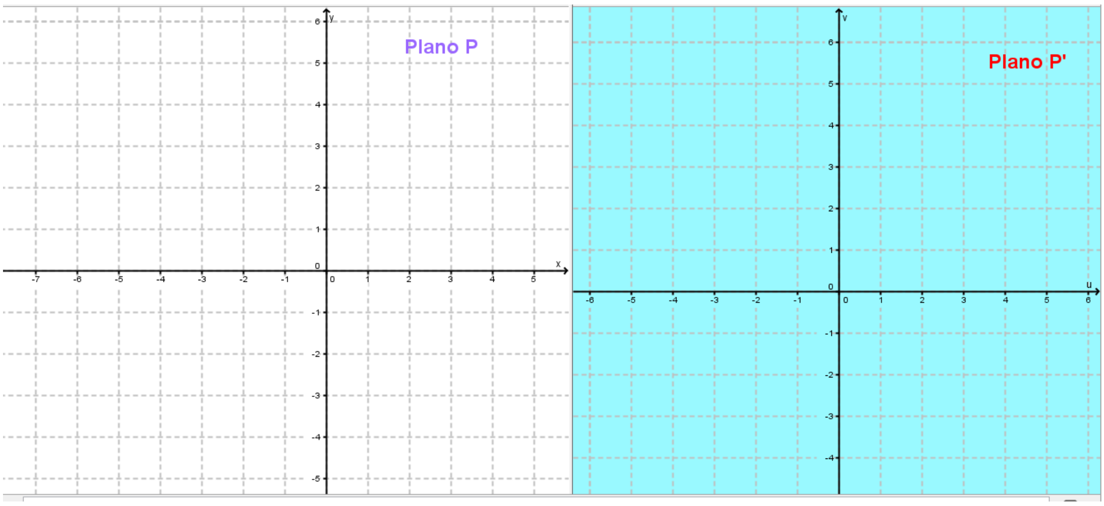
**Transformaciones de un plano a otro**

Las transformaciones de un plano a otro o de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, nos permiten determinar las posiciones o ubicaciones de un objeto matemático llámese punto, segmento o cualquier figura plana, al aplicársele una operación (transformación), en el primer plano $(x - y)$; mediante la cual obtenemos su imagen en el segundo plano $(u - v)$.

Las transformaciones pueden ser: Una ampliación o reducción (dilatación), una rotación, una traslación, entre otras. Para ello es necesario que resolvamos las siguientes actividades que nos van a permitir realizar de manera eficaz dichas transformaciones.

La actividad que iniciamos a continuación nos da la posibilidad de una mayor comprensión de los números laterales y sus aplicaciones, por lo tanto, es necesario hacer uso del transportador, del compás y de reglas para facilitar la comprensión, también le serán de gran utilidad los geoplanos circulares y rectangulares y del software GeoGebra; elementos que constituyen nuestro universo de los números laterales.

En términos generales Una transformación es una regla que asigna a cada punto z de un conjunto D ⊂ $NL$ del plano x-y, un único punto w del plano u-v. Al punto w se le llama imagen y al punto z preimagen.




***Nombre figura***
Fuente: Editado de Geogebra

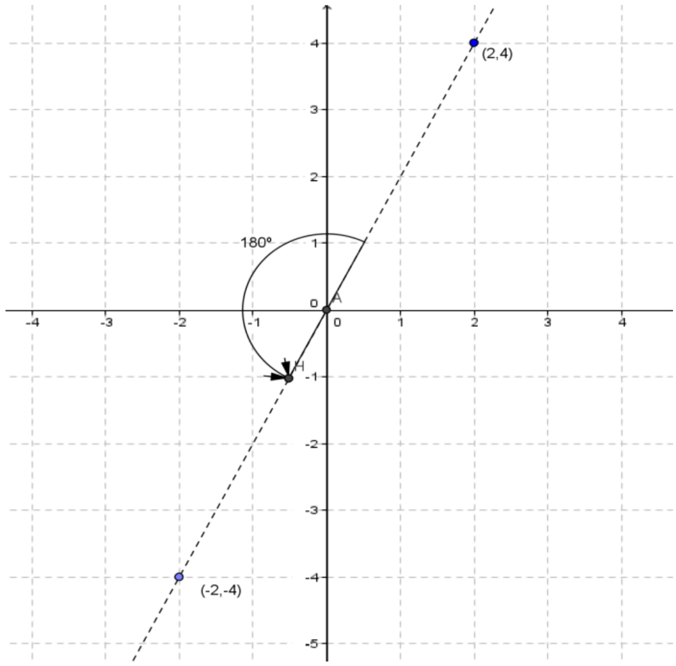
**Actividad de Introducción:**

1. En el círculo cuyo radio es una unidad ubique los puntos A= (0,1), B= (1,0), C= (-1,0), D=(0,-1).
   a. ¿Cuáles pares de puntos son diametralmente opuestos: ( , ) y ( , ) ; ( , ) y ( , ). ¿Cuál es el ángulo que forman los números opuestos?
   b. ¿Cuál es el ángulo de rotación del punto (1,0) para ubicarse en su respectivo opuesto:
   c. ¿Cuál es el punto de ubicación del punto (1,0), luego de rotar un ángulo de 90° $= \frac{\pi}{2}$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj. _____

d. ¿Cuál es el punto de ubicación del punto (-1,0), luego de rotar un ángulo de $90° = \frac{\pi}{2}\ rad,$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj.______

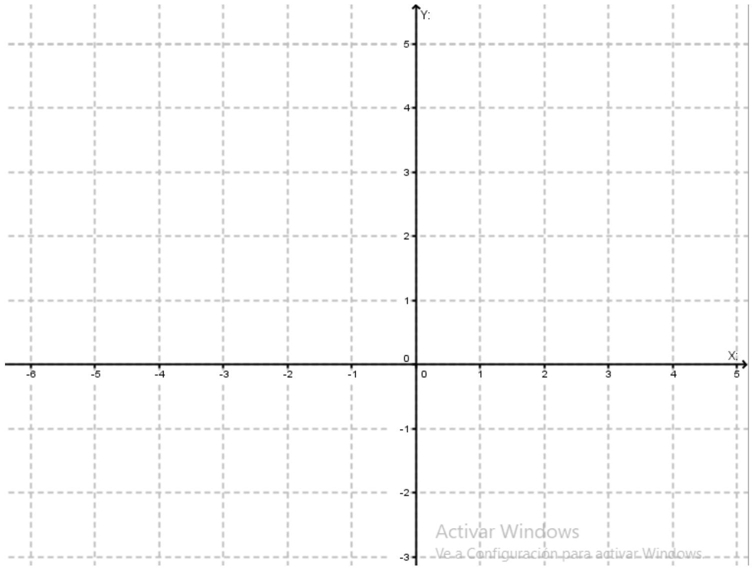
e. Cuál es el punto de ubicación del punto (0,-1), luego de rotar un ángulo de $90° = \frac{\pi}{2}$ rad, en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

f. Podemos obtener una rotación de $180^0$ de cualquier punto en el plano multiplicándolo por (-1,0); por ejemplo (-1,0)*(2,4), traslada el punto al (-2,-4) tal como lo muestra la figura. (dichos pares de puntos son opuestos).




***Ejemplo de números opuestos***
Fuente: Editado de Geogebra

2. Determine los puntos opuestos de cada uno de los puntos, ubíquelos en el plano y mediante un segmento de recta una cada punto con su respectivo opuesto.
   a. (3,5), su opuesto es ______
   b. (-2,1), su opuesto es______
   c. (-3,0), su opuesto es ______
   d. (2,-3), su opuesto es _______

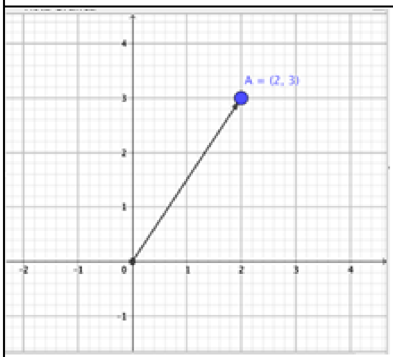
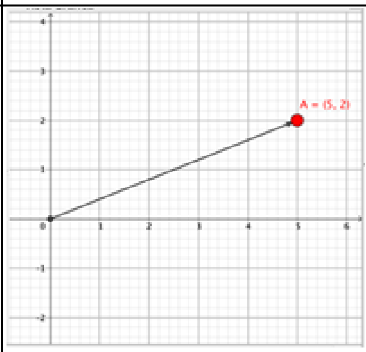



***Plano para la ubicación de un número y su opuesto***
Fuente: Editado de Geogebra

## Transformaciones

Recuerda que al realizar transformaciones es más fácil observar los efectos si hacemos uso de dos planos diferentes.

Sea un Número lateral cualquiera, digamos (2,3), en el **plano x-y**. A este número se le aplica una operación (suma o multiplicación) con otro número lateral, el resultado es una <u>transformación T(x,y)</u>, que va del **plano x-y** al **plano u-v,** tal como lo muestra la siguiente figura.

| **Plano (x,y)** | **Transformación** | **Plano (u,v)** |
|---|---|---|
|  | ¿Cuál fue la operación utilizada?…<br>$A = (2,3)$<br>¿?<br>A=(5,2) |  |

***Visualización transformaciones***
Fuente: Editado de Geogebra

Así mismo, con el método de transformación de NL, podemos convertir todos los puntos del **plano x-y** en otros puntos si lo deseamos.

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$T$ es el operador de transformación del NL $(x, y)$ así como el símbolo $+$ es el operador de la suma, y su resultado nos da el número $(u, v)$.

Así, por ejemplo, si tenemos la expresión:

$(u, v) = T(x, y) = (x, y) + (4, -3)$ (1)

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{4}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{3})$$

Esto quiere decir que, para cualquier Número Lateral, digamos $(1,2)$, se reemplaza en la expresión (1), en el lugar de $(x, y)$ para ser operado con (4,-3), dando como resultado…

$$(u, v) = T(1,2) = (1,2) + (4, -3)$$

$$(u, v) = T(1,2) = (1 + 4\,, 2 - 3)$$

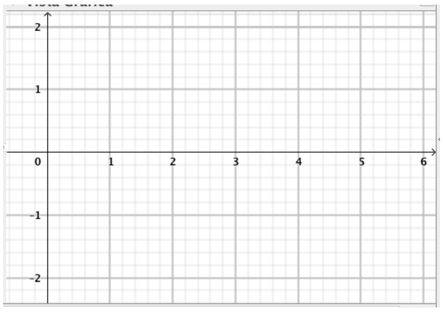
$$(u, v) = T(1,2) = (5, -1)$$

$$(u, v) = (5, -1)$$

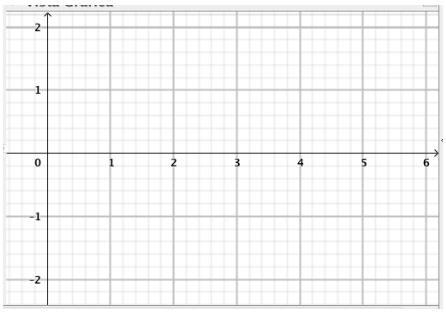
Quiere decir que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{5}$ y $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{1}$.

Dibújalos en los planos correspondientes

Plano x,y




Plano u,v

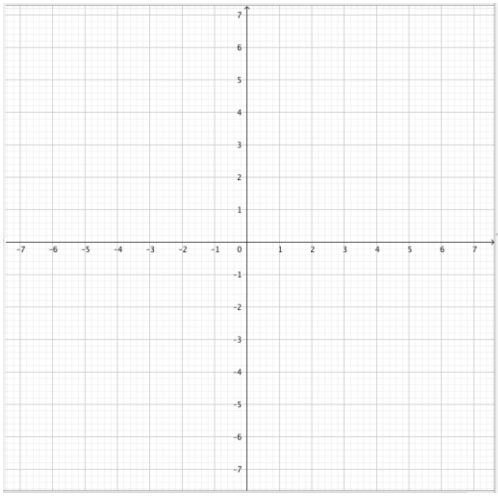



***Construcción transformaciones***
Fuente: Editado de Geogebra

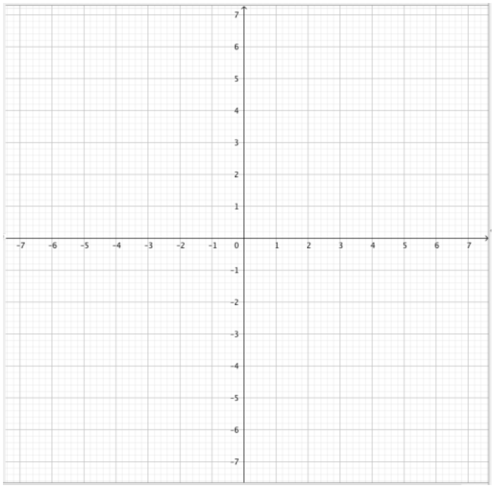
**Actividad Individual N° 10.**

1. (En Geogebra) Realiza en el **plano x-y** un dibujo con 5 NL cualquiera. A esto aplícales la transformación $T(x,y) = (x,y) + (1,-1)$. Dibuja en el **plano u, v** los resultados:

Plano x-y



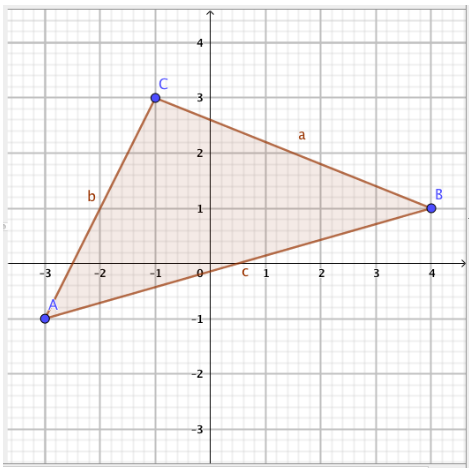
Plano u-v



***Representación transformación de puntos***
Fuente: Editado de Geogebra

2. Explica que ocurrió con la figura:
3. Realiza la transformación de las siguientes figuras

Plano x,y

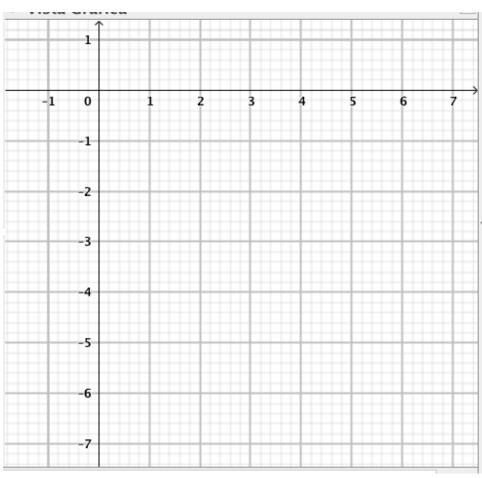


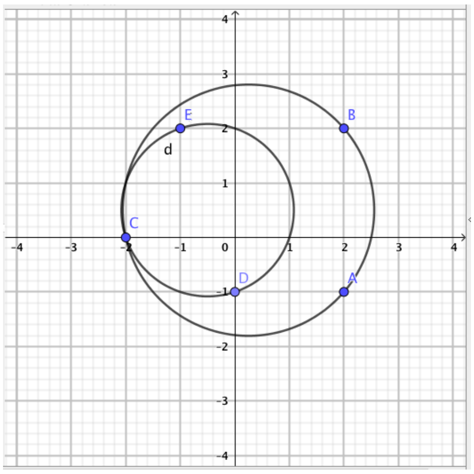

Transformación

$$T(x,y) = (x,y) + (2,-2)$$

$$(u,v) = (x+2, y-2)$$

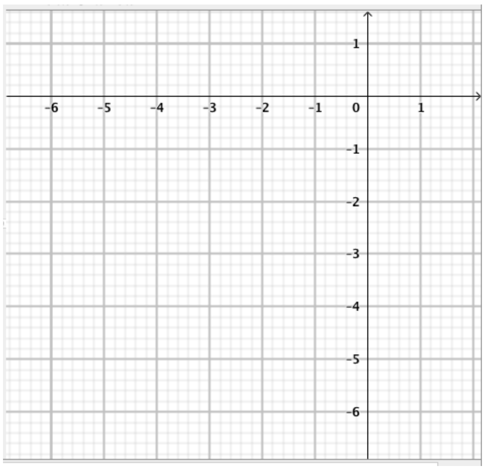
Plano u,v

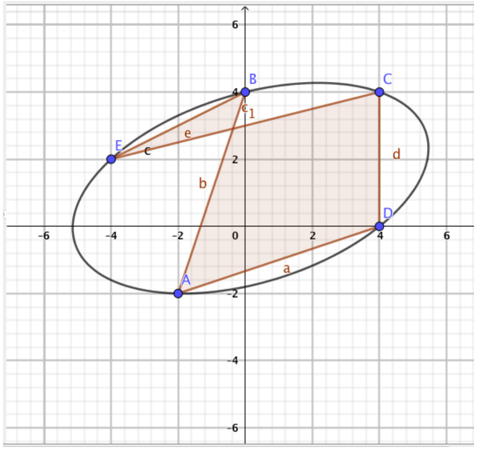





$$T(x,y) = (x,y) + (-2,-2)$$

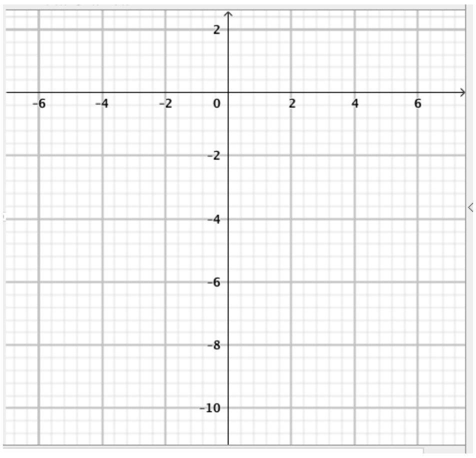
$$(u,v) = (\qquad , \qquad)$$






$$T(x,y) = (x,y) + (0,-4)$$

$$(u,v) = (\qquad , \qquad)$$



***Construcción transformaciones***
Fuente: Editado de Geogebra

4. Se puede entonces concluir que la transformación $T$ de números Laterales con la operación **<u>suma</u>** da como resultado en los dibujos en el plano:

a) Una Rotación

b) Una Traslación

c) Una Dilatación

Porque…

Ahora veamos la Transformación con la **<u>multiplicación</u>**,

$$(u,v) = T(x,y) = (\color{red}{n}, \color{cyan}{m}) * (x,y)$$

$$(u,v) = (\color{red}{n}x - \color{cyan}{m}y, \color{red}{n}y + \color{cyan}{m}x)$$

Veamos algunas características

1) Cuando $(n,0)$, por ejemplo $(2{,}0)$

$$T(x,y) = (2{,}0) * (x,y)$$

Si realizamos la operación completa nos queda

$$T(x,y) = (2x - 0y, 2y + 0x)$$

$$(u,v) = (2x, 2y)$$

En general, para cualquier $n \in \mathbb{R}, el\ operador$ $(n,0)$, es transformado en:

$$(u,v) = (nx, ny)$$

Esto quiere decir que cualquier punto $(x,y)$ es **<u>dilatado</u>** (ampliado o reducido) $n$ veces su tamaño en el **plano** $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$.

**Actividad Grupal N° 11:**

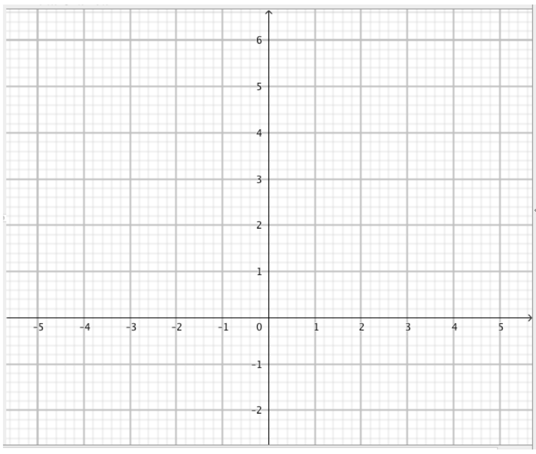
1. Sea $T(x,y) = (2{,}0) * (x,y)$

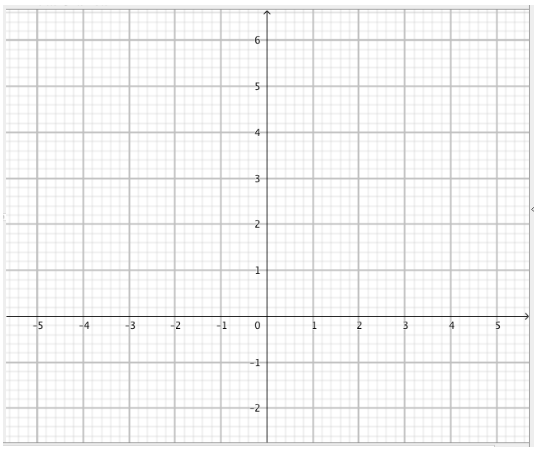
Transformar los siguientes números laterales $A = (-3{,}0), B = (-2{,}2), C = (0{,}3), D = (2{,}2), E = (2.5{,}0), F = (0{,}0)$ según la fórmula $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{2x},\boldsymbol{2y})$

Dibújalos:

Plano x-y

Plano u-v





***Plano para la construcción de transformaciones***
Fuente: Editado de Geogebra

2. Completa la tabla

| **NL en el plano x,y** | **Formula de Transformación** | **NL en el plano u,v** |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{A} = (\mathbf{2}, -\mathbf{3})$ | $T(x,y) = (3,0) * (x,y)$<br>$(u,v) = (\quad x, \_\_ y)$ | $A` = (\quad , \quad )$ |
| $\boldsymbol{B} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ | $T(x,y) = (8,0) * (x,y)$<br>$(u,v) = (\_\_\_, \_\_\_)$ | $B` = (\_\_\_, \_\_\_)$ |
| $\boldsymbol{C} = (\quad , \quad )$ | $T(x,y) = (-6,0) * (x,y)$<br>$(u,v) = (\quad , \quad )$ | $C` = (18, -6)$ |
| $\boldsymbol{D} = (\_\_, \_\_)$ | $T(x,y) = (0,0) * (x,y)$<br>$(u,v) = (\_\_\_, \_\_\_)$ | $D` = (\_\_, \_\_)$ |
| $\boldsymbol{E} = (\mathbf{5}, \mathbf{7})$ | $T(x,y) = (\quad ,0) * (x,y)$<br>$(u,v) = (\quad , \quad )$ | $E` = (5,7)$ |

3. Se puede entonces concluir que la transformación T de un número Lateral con la operación **multiplicación** de la forma $(n, 0) * (x, y)$ da como resultado:

a) Una rotación
b) Una Traslación
c) Una Dilatación

Porque:

2) Ahora veamos cuando la transformación multiplica $(0, m)$

$$T(x,y) = (0, m) \cdot (x, y)$$
$$= (0x - my, 0y + mx)$$
$$(u, v) = (-my, mx)$$

Obsérvese que la componente $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ cambian de posición, además que cada una se dilatan m veces y la primera componente tiene signo opuesto. ¿Qué clase de transformación geométrica les hará a las figuras?

3) Plantea en Geogebra, en el geoplano circular o rectangular, donde prefieras un ejemplo de una transformación de este tipo y observa su comportamiento. Por favor, escribe que notaste en la figura -digamos se giró, se amplió, se redujo, o rotó y se dilata, etc. Explica que pasa con esta transformación, practica cambiando los signos, ….

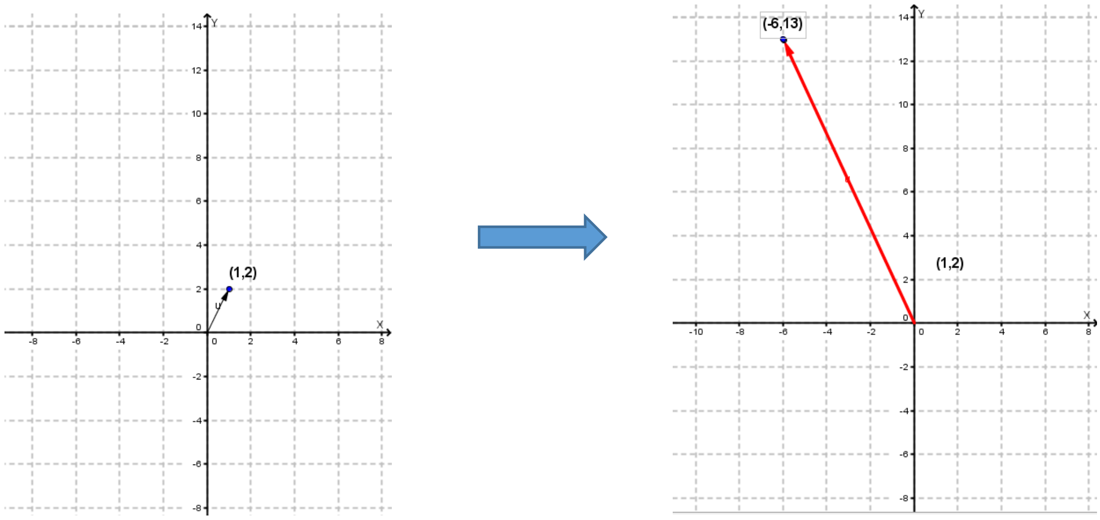
4) Cuando la transformación multiplica cada número por otro de la forma $(n, m)$

Es decir, $$(u, v) = T(x, y) = (n, m) \cdot (x, y)$$

$$= (nx - my, ny + mx)$$

Miremos la imagen que le corresponde al número (1,2), mediante la transposición

$(u, v) = T(x, y) = (4,5) \cdot (x, y) = (4\ ,5) \cdot (1,2) = (4 - 10, 8 + 5) = (-6, 13)$.
Graficamente:



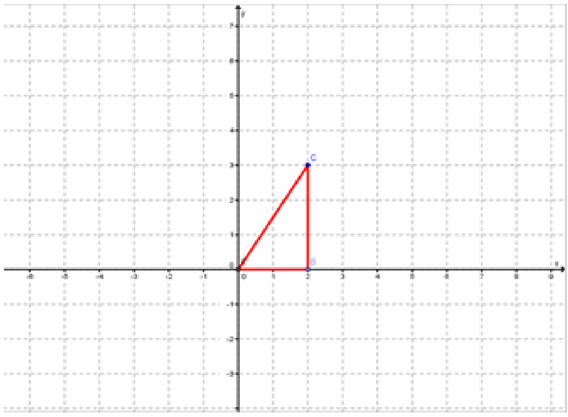

***Efecto transformaciones***

Fuente: Editado de Geogebra

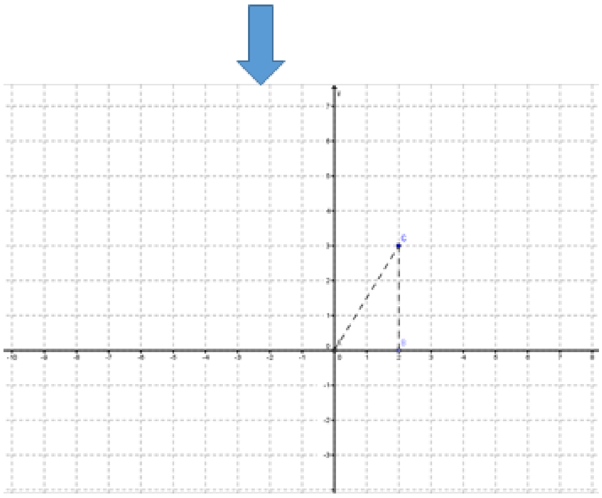
Nótese, que para observar con claridad el efecto que éste tipo de transformaciones produce, es mejor realizar las multiplicaciones en forma angular, teniendo en cuenta el proceso que conduce a escribir el número de forma binómica a la forma angular.

**Actividad Individual N° 12.**

1. Aplique la transformación $T(x, y) = (1,2) * (x, y)$. A cada uno de los vértices del siguiente triángulo, dibuja la imagen (nueva figura), en el plano P´ y describe el efecto que produce sobre la figura inicial.



**Plano P**



**Plano P´**

***Construcción de la transformación T(x,y)=(1,2)*(x,y)***
Fuente: Editado de Geogebra

**Compara la imagen con la preimagen**

2. **Producto de la forma** $T(x, y) = (0, m) \cdot (x, y)$

$$= (0x - my, 0y + mx)$$

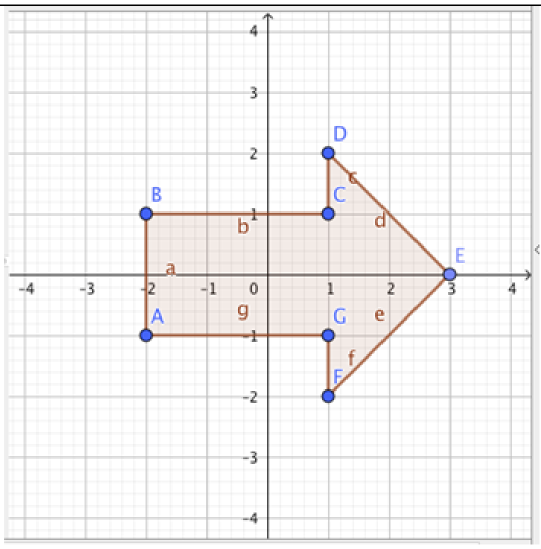
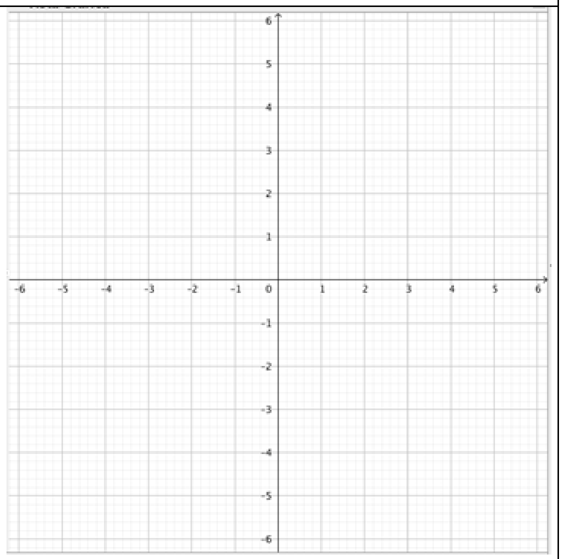
$$(u,v) = (-my, mx)$$

Sea la transformación $T(x,y) = (0,2)\cdot(x,y)$

$$(u,v) = (\underline{\qquad}, \underline{\qquad})$$

¿Desde el punto de vista geométrico que experimenta una figura cualquiera, con esta transformación? (Rotación, Dilatación o Traslación)

En la siguiente figura transforma sus vértices y observa que pasa.

| *Plano x-y* | *Plano u-v* |
|---|---|
|  |  |

Realiza el cálculo de las siguientes operaciones con la transformación $T(x,y) = (0,3) * (x,y)$ en Geogebra y completa.

| $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ | $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ |
|---|---|
| $(4,8)$ | $(\underline{\qquad}, \underline{\qquad})$ |
| $(-30,46)$ | $(\underline{\qquad}, \underline{\qquad})$ |
| $(234,322)$ | $(\underline{\qquad}, \underline{\qquad})$ |

3. **Transformación de la forma** $T(x,y) = (m,n)(x,y) + (a,b)$

   En términos de $u$ y $v$

$$(u,v) = (mx - ny + a, my + nx + b)$$

Por ejemplo.

Sea un punto $A = (2,3)$ y la transformación $T(x,y) = (2,1) \cdot (x,y) + (4,5)$

En términos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ queda

$$(u,v) = (2x - 1y + 4\,, 1x + 2y + 5)$$

Donde $\boldsymbol{u} = 2x - y + 4$ y $\boldsymbol{v} = x + 2y + 5$.

Observa el **video 2** adjunto para programar esta trasformación en Geogebra

Realiza en Geogebra la transformación de los siguientes puntos usando la relación $T(x,y) = (2,2)(x,y) + (3,2)$

$$(u,v) = (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\,,\,\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) \quad T(0,0) = (\_\_\_\,,\_\_\_)$$

$$T(3,0) = (\_\_\_\,,\_\_\_)$$

$$T(0,3) = (\_\_\_\,,\_\_\_)$$

$$T(3,3) = (\_\_\_\,,\_\_\_)$$

| *Plano x-y* | *Plano u-v* |
|---|---|
| | |

4. **Transformación cuadrática**

Una expresión de la forma $T(x,y) = (x,y)^2 + (m,n)$ es una transformación "cuadrática" ya que uno de sus términos esta elevado al cuadrado. Lo que corresponde al producto $(x,y) \cdot (x,y)$.

Así, por ejemplo, la transformación $T(x,y) = (x,y)^2 + (0,0)$ corresponde en términos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ a

$$(u,v) = (x^2 - y^2 + 0\,, 2xy + 0)$$

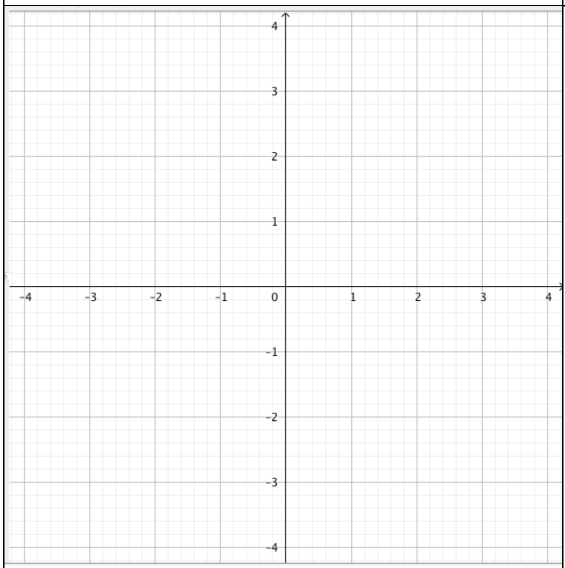
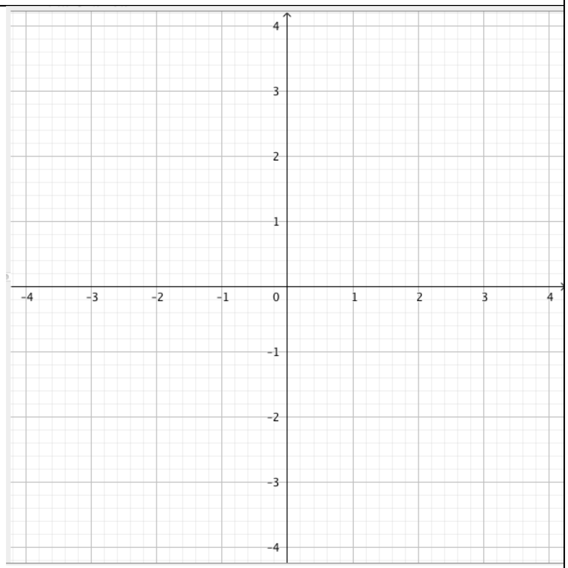
$$(u, v) = (x^2 - y^2\ , 2xy)$$

Donde $\boldsymbol{u} = x^2 - y^2$ y $\boldsymbol{v} = 2xy$

Por medio de la transformación $T(x, y) = (x, y)^2 + (0,0)$ realiza en Geogebra la transformación de cada punto de la tabla.

| *Puntos en el plano x-y* | *Puntos en el plano u-v* |
|---|---|
| $(-3,1)$ | |
| $(-2,1)$ | |
| $(-1,1)$ | |
| $(0,1)$ | |
| $(1,1)$ | |
| $(2,1)$ | |
| $(3,1)$ | |

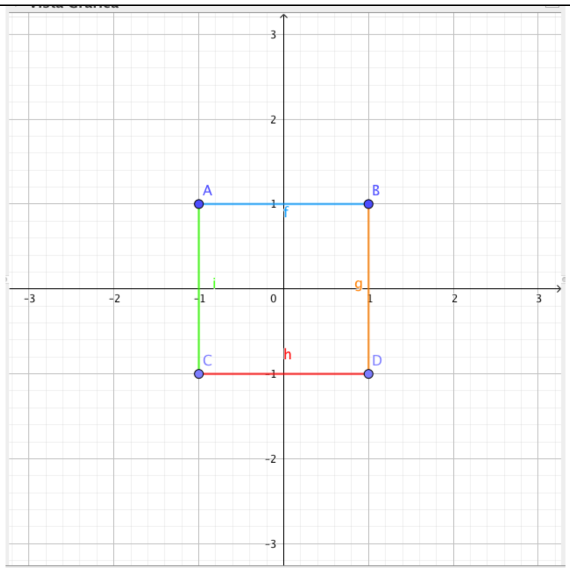
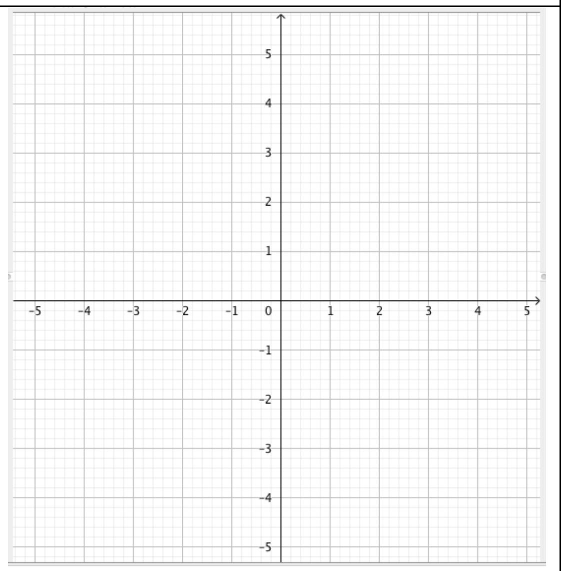
Mapea las dos trayectorias $(x, y)$ y $(u, v)$ de los puntos del cuadro anterior

| *Plano x-y* | *Plano u-v* |
|---|---|
|  |  |

Como se observó, el registro de cada punto del ***plano x-y*** deja una figura de la forma de

__________, mientras que, la figura que se observa en el ***plano u-v*** es _____________

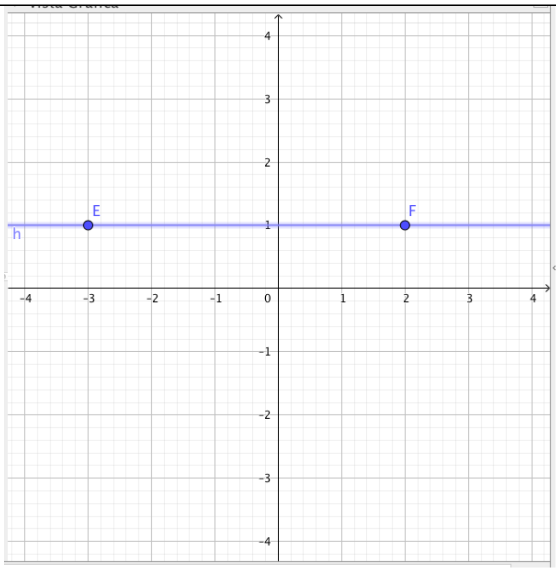
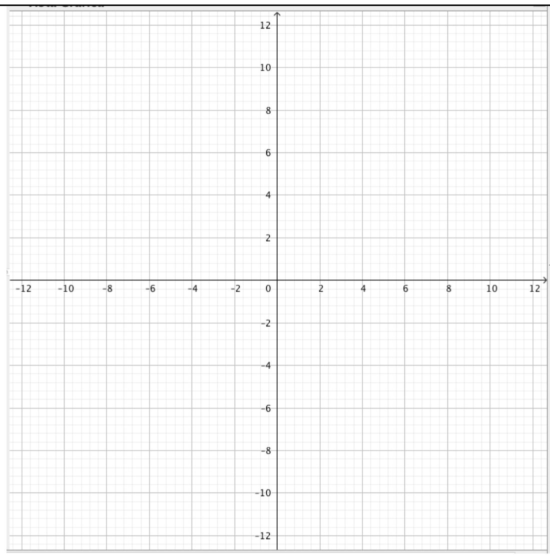
5. Usando la transformación $T(x,y) = (x,y)^2 + (m,n)$ donde $(m,n) = \{(0,0),(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2)\}$, describe las transiciones del punto $(m,n)$ en el *plano u-v*, cuando $P$ se desplaza por el cuadrado $ABCD$:

| *Plano x-y* | *Plano u-v* |
|---|---|
|   |  |

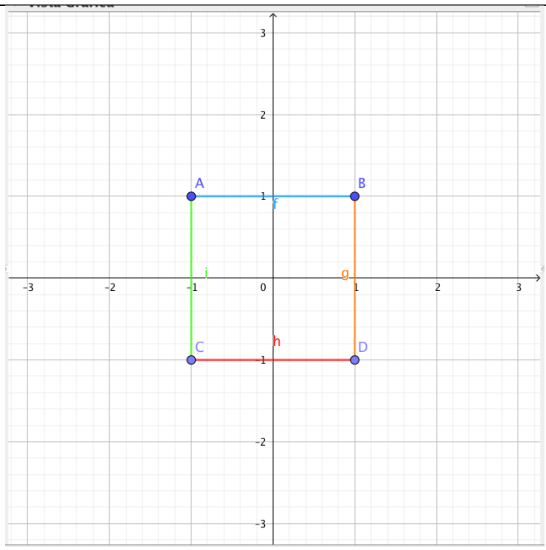
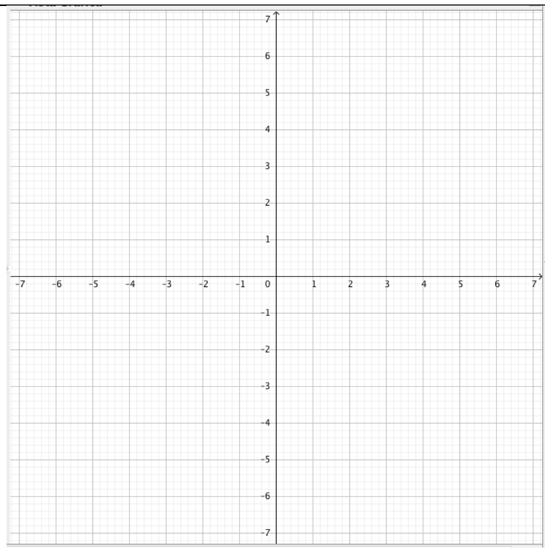
6. ¿Cómo es la mapea una recta en la transformación $T(x,y) = (x,y)^3$?. Resuelve en términos de $u$ y $v$ y mapea la recta $h$.

$$(u,v) = (\_\_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_\_\_)$$

| *Plano x-y* | *Plano u-v* |
|---|---|

| | |
|---|---|
|  |  |

Para $T(x,y)_5 = (x,y)^4 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3)$, mapea con ayuda de Geogebra

| | |
|---|---|
|  |  |

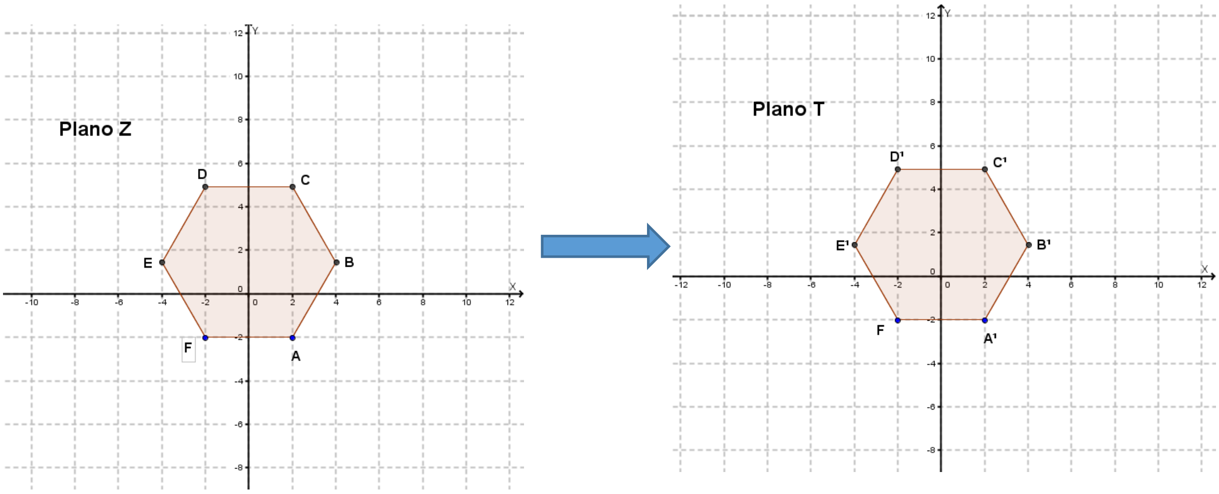
7. Participe de manera activa en el juego Enigma

**Algunas Transformaciones especiales en los números laterales.**

Miremos algunas transformaciones de gran utilidad en los números laterales.

1. **Transformación T(a,b)=(a,b)** o también (u,v)=f(z)=z, donde z es cualquier NL z=(x,y) esta transforma un número del conjunto (x,y); en el mismo número en el plano (u,v) o regiones del plano Z en regiones iguales del plano T.

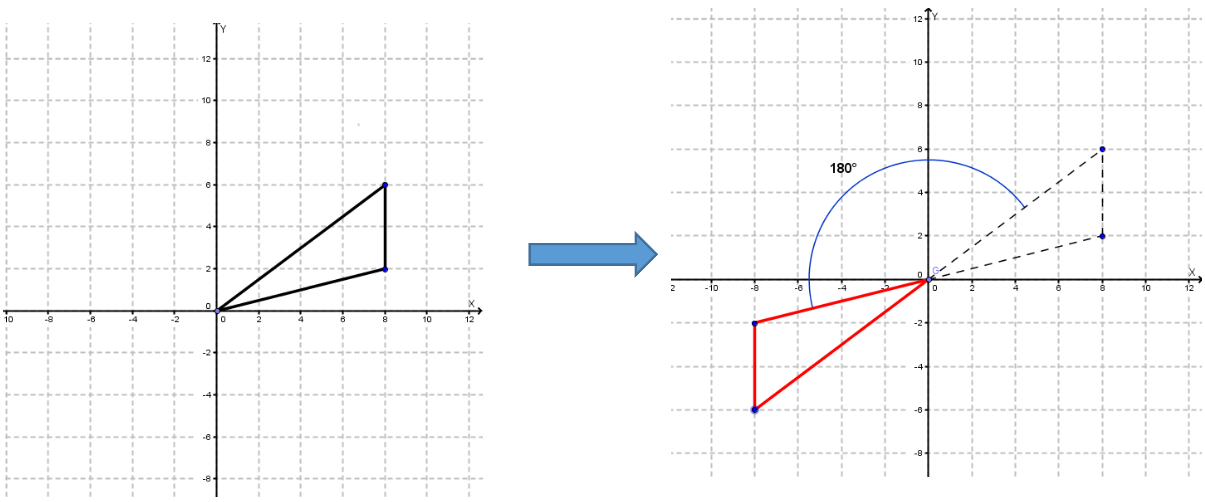
Por ejemplo T(2,3)=(2,3).




**Construcción de la transformación**
Fuente: Editado de Geogebra

2. La transformación $T(x,y) = (-1{,}0) * (x,y) = -(a,b)$ o f(z)= -z. Le asigna a cada punto del plano Z su opuesto o inverso en el plano T.

Por ejemplo, esta transformación rota el triángulo un ángulo de $180^0$

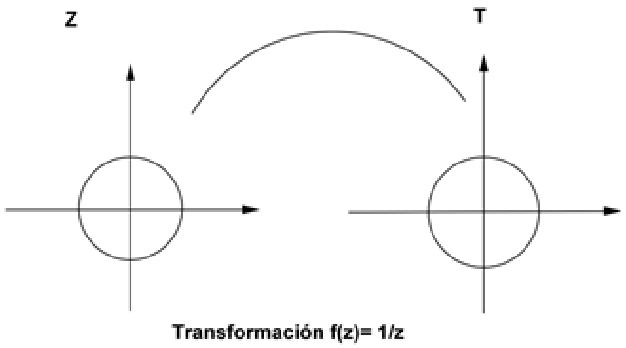


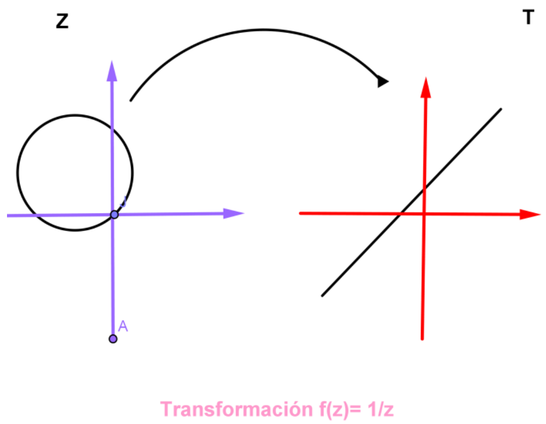

**Construcción de la transformación**
Fuente: Editado de Geogebra

**3.** Transformación inversa. $f(z) = \frac{1}{z}$; si $z = (x, y)$ entonces:

$f(x, y) = \frac{1}{(x,y)} = \frac{(x,-y)}{x^2+y^2} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$ donde $(x, -y)$, es la conjugada de $z$, notada $\bar{z}$ y $x^2 + y^2$ es la distancia al cuadrado de $z$.

Esta transformación convierte círculos centrados en el origen en el plano Z en círculos centrados en el origen en el plano T.



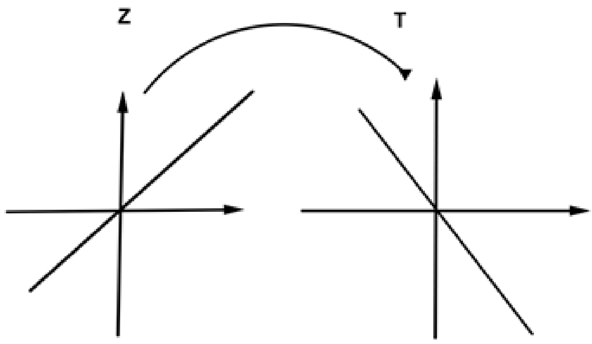




**Transformación inversa**
Fuente: González, Mesa y Martínez (2009, p. 79)

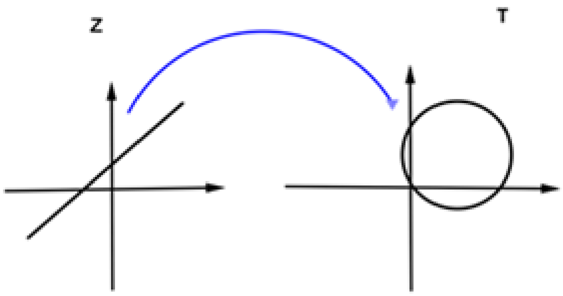
Círculos del plano Z que son tangentes al origen del plano, en rectas del plano T, que no pasan por el origen.

Rectas que no pasan por el origen del plano Z se transforman en círculos tangentes al origen del plano T

Y además rectas que pasan por el origen en Z son transformadas en rectas que pasan por el origen en el plano T.




Transformación f(z)=1/z



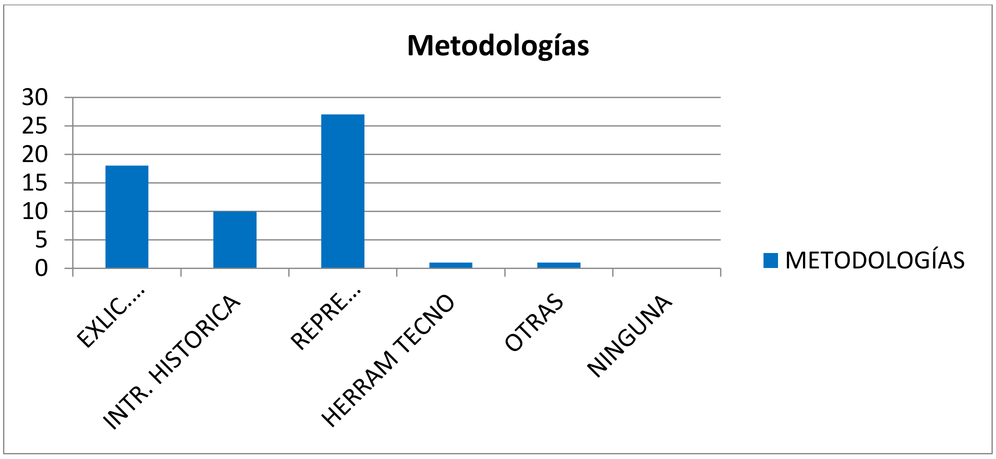

Transformación f(z)=1/z

**Efectos de la transformación inversa**
Fuente: Tomado de González, Mesa y Martínez (2009, p. 79)

**Anexo 9**

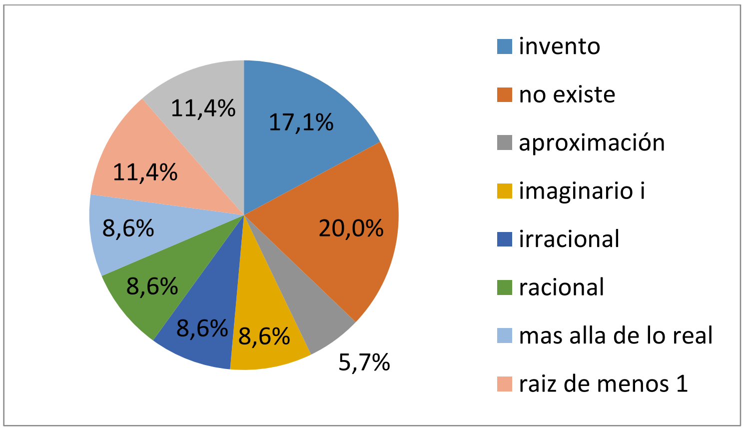
**Interpretación de las encuestas realizadas a los estudiantes de grado Once**

1. ¿Cuál de las siguientes metodologías utilizo el profesor para la enseñanza de los números complejos?



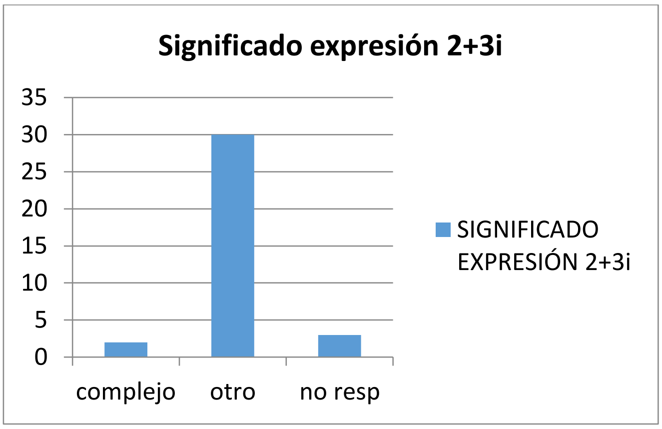

La gráfica nos permite concluir que para la gran mayoría de los estudiantes se les oriento los números complejos a través de representaciones gráficas y de la explicación magistral por parte del docente, que muy pocos saben del devenir histórico de este conjunto como también que prácticamente no se utilizaron herramientas tecnológicas para su desarrollo.

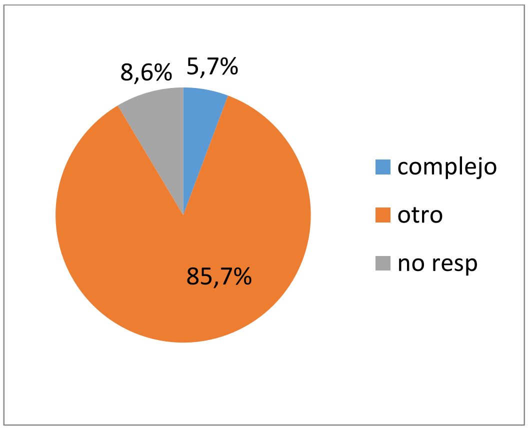
2. ¿Qué es para usted un número imaginario?




Del análisis de la información se deduce que un 17,1% asocia el número imaginario a un invento, un 20% a algo que no existe, un 5,7% a una aproximación, un 8,6% lo entiende como lo que tiene i, 8,6% lo ve como un irracional, también el 8,% lo ve como un racional, el 8,6% lo entiende como algo que está mas allá de lo real, 11,4 lo interpreta como raíz de menos uno y el 11,4% lo ve como otra cosa.

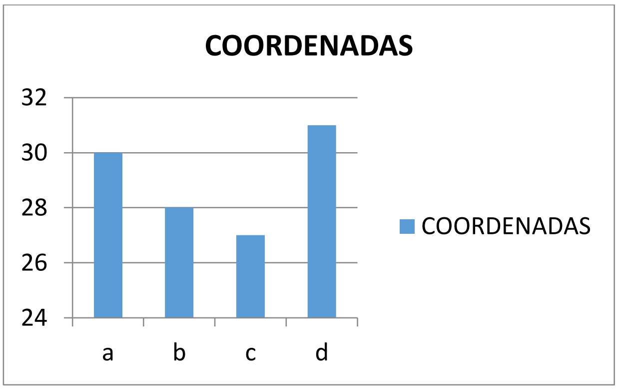
3. ¿Qué significado tiene para usted la expresión $2 + 3i$?

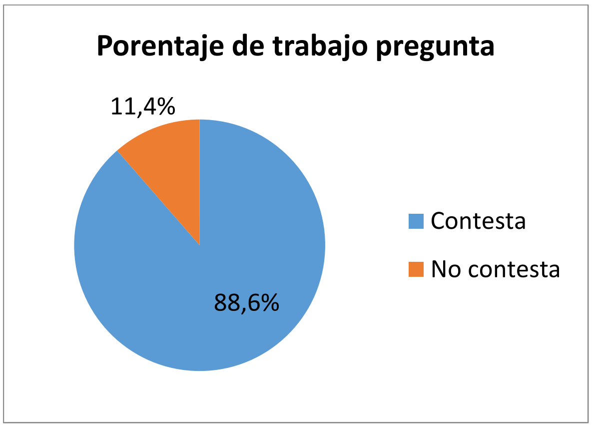



Las graficas nos muestran que los estudiantes en su gran mayoría no identifican expresiones de este tipo como un número complejo; reafirmando la conclusión anterior.

4. Identifique las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E en el grafico y relaciónelos con el que le corresponden en la tabla.



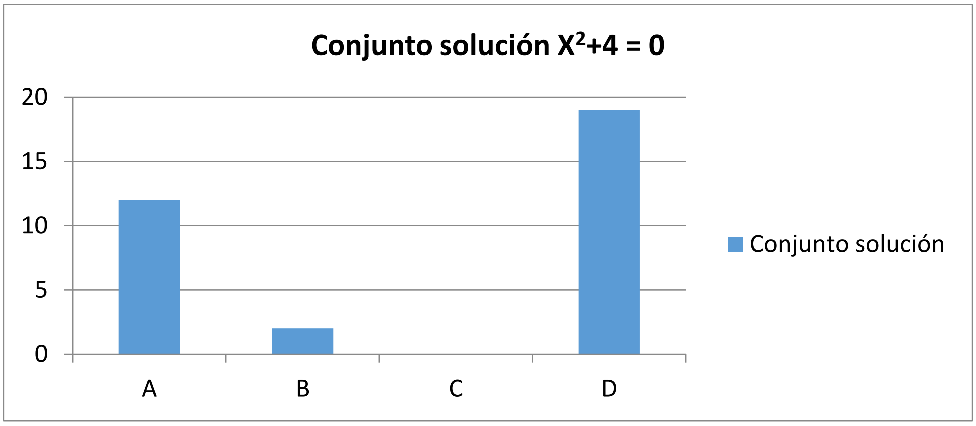



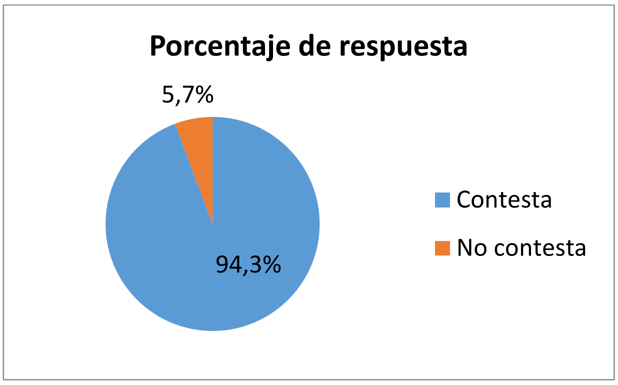

El 88,6% se ubica de manera correcta puntos en el plano cartesiano, lo que nos ratifica que no es extraño para ellos ubicar parejas ordenadas pero no las asocian a un número sino a una posición en el plano cartesiano.

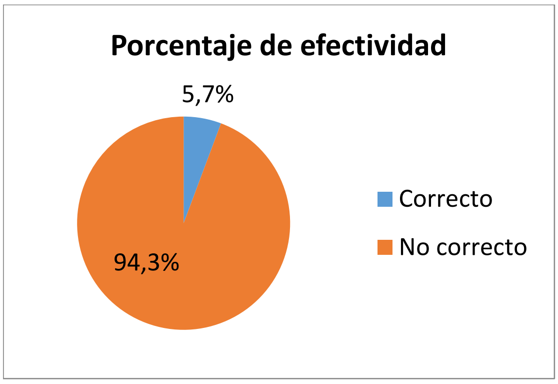
5. El conjunto solución de la ecuación $x^2 + 4 = 0$, es:

| | |
|---|---|
| A | $2 \ y \ -2$ |
| B | $2i \ y \ -2i$ |

| | |
|---|---|
| C | $i\ y\ -i$ |
| D | No tiene solución |

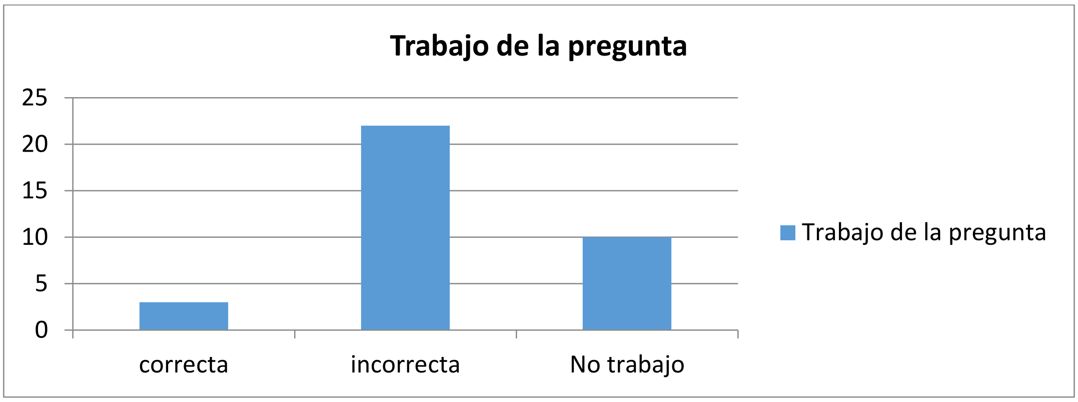


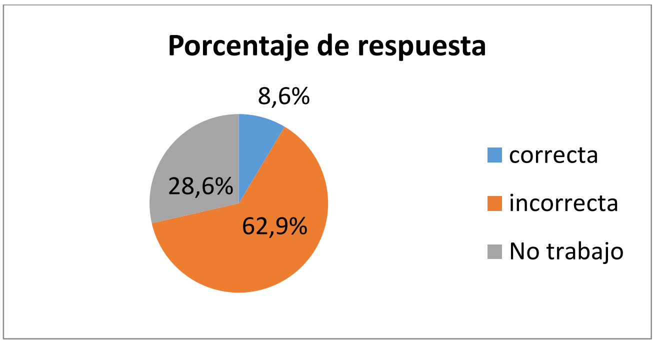



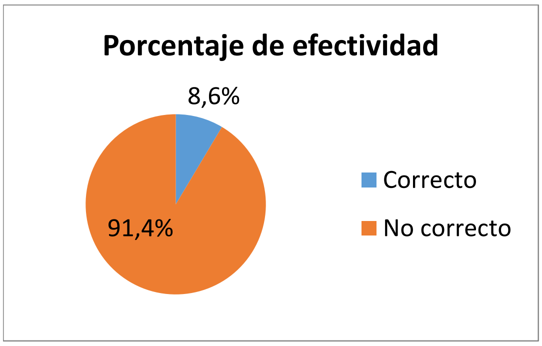




El 94,3% de los encuestados intenta resolver la ecuación, aunque en forma correcta únicamente el 5,7%; que corresponde a dos estudiantes. También se evidencia la dificultad que presentan los estudiantes en la solución e interpretación de ecuaciones.

6. Efectué la siguiente operación $(4 + 5i)(4 - 9i)$



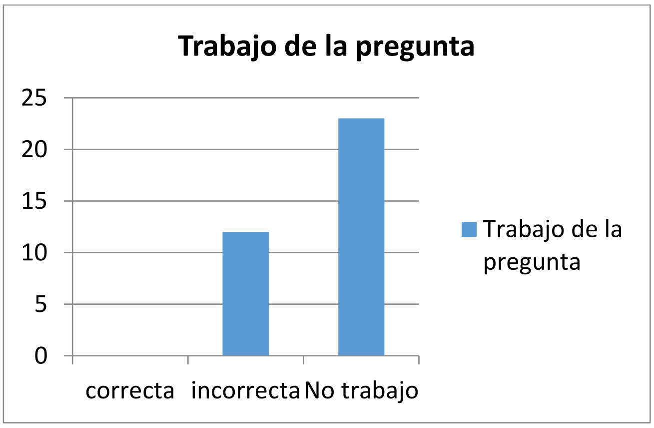



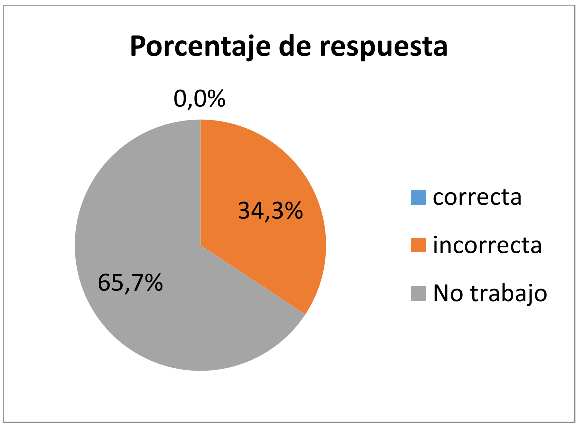




Se observa que únicamente un 8,6%, de los estudiantes resuelve en forma correcta la multiplicación de dos números complejos y que más del 91% de los jóvenes no trabaja el ejercicio o lo efectúa de manera incorrecta, evidenciando las dificultades que tienen al efectuar operaciones algebraicas debido posiblemente a que obtuvieron un conocimiento significativo en dichos procesos

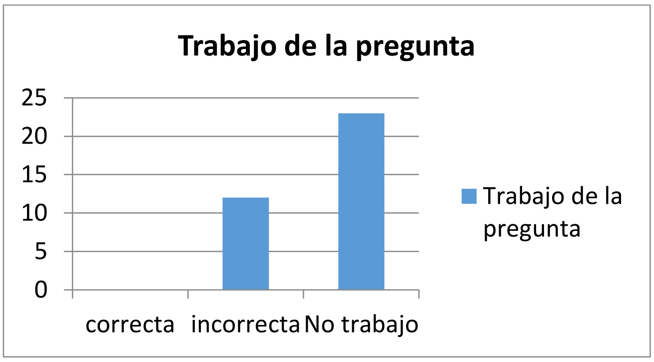
7. Se tiene $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. ¿Cuáles serian las coordenadas cartesiana y polares del punto A, ubicado en el circulo cuyo radio es la unidad?.

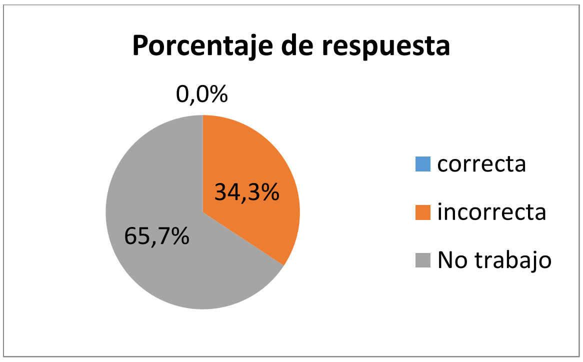
**Coordenadas cartesianas.**



**Coordenadas polares**

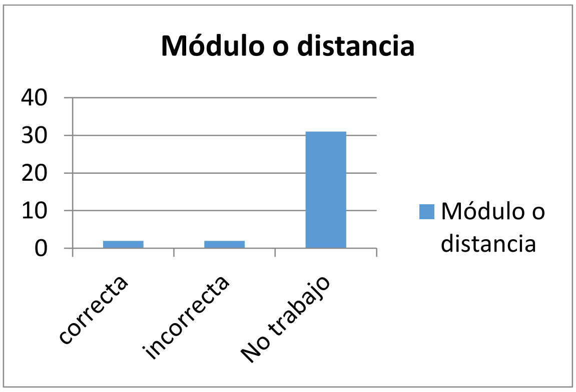


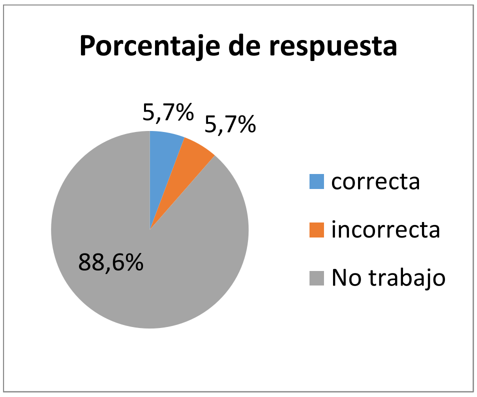




Ningún estudiante responde de manera correcta esta pregunta ni en la parte de coordenadas cartesianas ni las polares: Además 23 de los 35 estudiantes no trabaja este punto y los 12 que lo trabajan lo resolvieron mal.

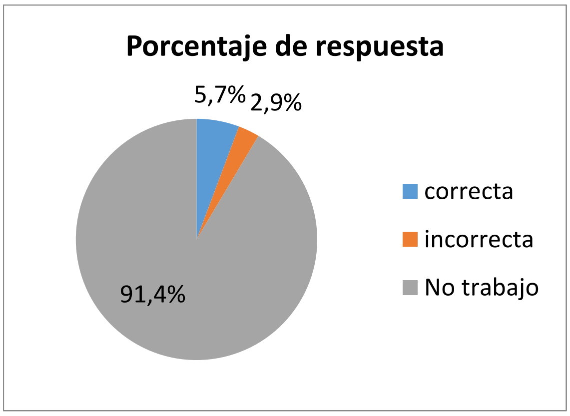
8. Ubica en el plano el punto $Z = (4,4) = 4 + 4i$ y traza un segmento dirigido desde el origen. Determina el módulo o distancia del origen al punto $Z$ y el argumento o ángulo que forma el segmento con el semi eje horizontal, escribe además dicho segmento en forma trigonométrica usando las componentes rectangulares del segmento dirigido.

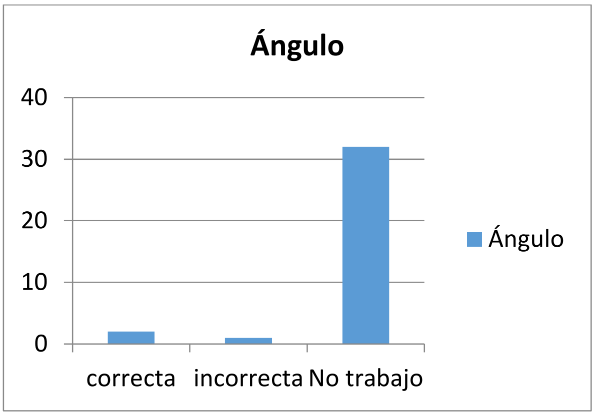
**Distancia**



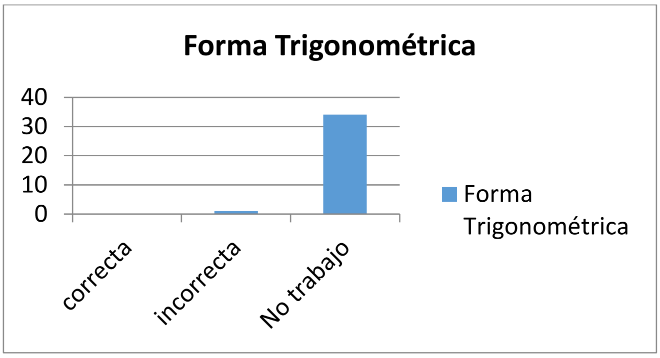



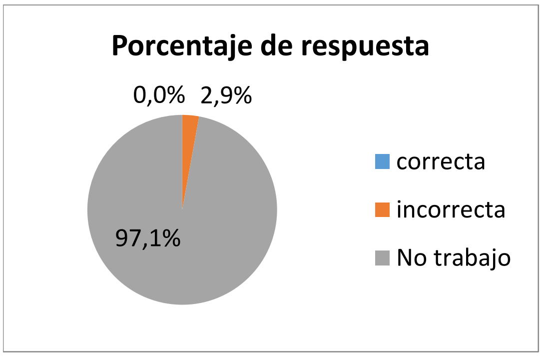

**Ángulo**





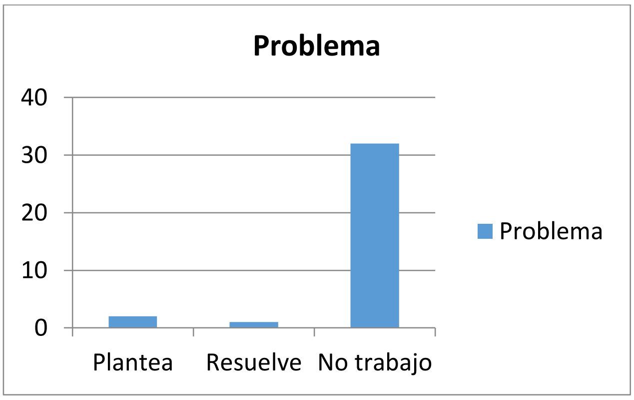

**Forma Trigonométrica**

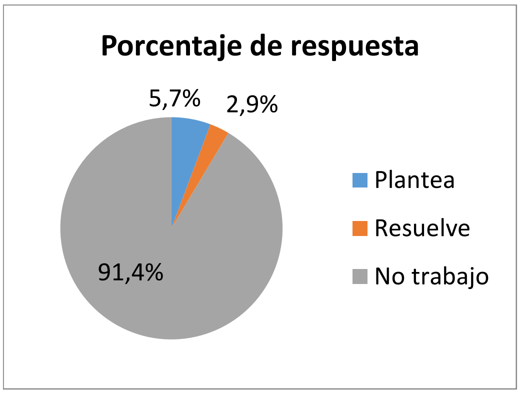



Respecto a este ítem observamos que para hallar la norma solo lo trabajan 4 estudiantes, de los cuales dos lo hacen en forma correcta. Respecto al ángulo lo trabajan tres alumnos, dos de ellos de manera correcta y en cuanto a la escritura en forma trigonométrica solo una persona lo trabaja y de manera incorrecta. Es decir en general los estudiantes no tienen la competencia para determinar la norma, el ángulo y la escritura en forma trigonométrica del número complejo.

9. Problema. Dividir 12 en dos cantidades tales que su producto sea 40. No olvide que las soluciones de la ecuación cuadrática $(ax^2 + bx + c = 0)$, se obtiene mediante la expresión $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$



En cuanto a la respuesta del problema, observamos que únicamente tres estudiantes intentan resolverlo y solamente uno lo hace de manera correcta. Situación que nos permite concluir que en el tema de la resolución de problemas con ecuaciones cuadráticas y específicamente si la solución es compleja los jóvenes tienen grandes debilidades.